

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ÉCOLE DOCTORALE : Sciences et Technologie de l'Information, des
Télécommunications et des Systèmes

Laboratoire de signaux et systèmes

DISCIPLINE : Automatique/Robotique

THÈSE DE DOCTORAT

soutenue le 28/11/2013

par

JLASSI SARRA

FORMULATION ET ETUDE DES PROBLEMES DE COMMANDE EN CO-MANIPULATION ROBOTIQUE
--

Directeur de thèse :	CHITOUR YACINE	Professeur (L2S)
Co-encadrants :	TLIBA SAMI	maître-assistant (L2S)
Composition du jury :		
<i>Rapporteurs :</i>	JEAN FRÉDÉRIC SIGALOTTI MARIO	Professeur (ENSTA ParisTech) Chargé de recherche (INRIA)
<i>Examineurs :</i>	NORMAND-CYROT DOROTHÉE STULP FREEK	Directeur de recherche (CNRS) maître-assistant (ENSTA ParisTech)

Résumé

Dans ce travail de thèse, nous abordons les problèmes de commande posés en co-manipulation robotique pour des tâches de manutention à travers un point de vue dont nous pensons qu'il n'est pas suffisamment exploité, bien qu'il a recours à des outils classiques en robotique. Le problème de commande en co-manipulation robotique est souvent abordé par le biais des méthodes de contrôle d'impédance, où l'objectif est d'établir une relation mathématique entre la vitesse linéaire du point d'interaction homme-robot et la force d'interaction appliquée par l'opérateur humain au même point. Cette thèse aborde le problème de co-manipulation robotique pour des tâches de manutention comme un problème de commande optimale sous contrainte. Le point de vue proposé se base sur la mise en œuvre d'un Générateur de Trajectoire Temps-Réel spécifique, combiné à une boucle d'asservissement cinématique. Le générateur de trajectoire est conçu de manière à traduire les intentions de l'opérateur humain en trajectoires idéales que le robot doit suivre. Il fonctionne comme un automate à deux états dont les transitions sont contrôlées par événement, en comparant l'amplitude de la force d'interaction à un seuil de force ajustable, afin de permettre à l'opérateur humain de garder l'autorité sur les états de mouvement du robot. Pour assurer une interaction fluide, nous proposons de générer un profil de vitesse colinéaire à la force appliquée au point d'interaction. La boucle d'asservissement est alors utilisée afin de satisfaire les exigences de stabilité et de qualité du suivi de trajectoire tout en garantissant l'assistance une interaction homme-robot sûre. Plusieurs méthodes de synthèse sont appliquées pour concevoir des correcteurs efficaces qui assurent un bon suivi des trajectoires générées. L'ensemble est illustré à travers deux modèles de robot. Le premier est le penducobot, qui correspond à un robot sous-actionné à deux degrés de liberté et évoluant dans le plan. Le deuxième est un robot à deux bras complètement actionné.

Dédicace



Je dédie ce travail à la mémoire de mes grands-mères, à qui ce modeste travail les aurait faites beaucoup plaisir. Je ne saurais exprimer mon grand chagrin en votre absence. Tous les mots ne sauraient exprimer le vide que je sens dans mon cœur. Le destin ne nous a pas laissé le temps pour jouir ce bonheur ensemble et de vous exprimer tout mon amour. Puisse Dieu le tout puissant vous accorder sa clémence, sa miséricorde et vous accueillir dans son paradis.

Remerciements

A l'issue de la rédaction de ce manuscrit, je suis convaincue que la thèse est loin d'être un travail solitaire. En effet, je n'aurais jamais pu réaliser ce travail doctoral sans le soutien d'un grand nombre de personnes dont la générosité, la bonne humeur et l'intérêt manifesté à l'égard de ma recherche m'ont permis de progresser dans cette phase délicate de « *l'apprenti chercheur* ».

Je tiens à adresser en premier lieu mes plus chaleureux remerciements à mon directeur de thèse Yacine CHITOUR pour m'avoir confié ce travail de recherches, ainsi que pour son aide et ses précieux conseils au cours de ces années. J'ai beaucoup apprécié sa passion pour la recherche mathématique, sa manière de voir les problèmes, même les plus complexes. Je suis très honorée de l'avoir eu pour directeur.

Je souhaiterais exprimer ma gratitude à mon co-encadrant Sami TLIBA pour la confiance qu'il m'a témoigné du début à la fin du travail, pour sa disponibilité à comprendre et à communiquer, sans oublier ses précieuses intuitions. Je suis ravie d'avoir travaillé en sa compagnie car, outre son appui scientifique, il a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de cette thèse. Je le remercie énormément pour sa patience, car il n'était pas toujours facile de diriger quelqu'un d'opiniâtre comme moi !

Sincèrement, grâce à lui j'ai pu apprendre beaucoup de choses dont certaines fort utiles pour mes travaux académiques bien sûr, mais aussi des choses importantes pour mon développement personnel.

Je voudrais remercier vivement Monsieur Frédéric JEAN, Professeur des Universités du Groupe Optimisation et Commande de l'Unité de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA ParisTech, et Monsieur Mario SIGALOTTI, Chargé de recherche de l'INRIA Centre de Recherche Saclay, pour avoir consacré du temps à la lecture de ce document en tant que rapporteurs.

J'associe à ces remerciements Madame Dorothee NORMAND CYROT, Directeur de recherche CNRS, et Monsieur Freek Stulp, maître-assistant à l'Ensta ParisTech, pour avoir accepté d'examiner mon travail.

Durant ces trois années de thèse, j'ai eu la chance de côtoyer à Supelec de nombreuses personnes attachantes, que toutes soient remerciées pour les bons moments partagés. Je pense notamment (pardon à ceux que j'oublie) à Ali (pour son amitié et pour tous les moments de joie, de colère et de folie), Bien (Alô em à), Jing, Marcel, Sarra, Sinda, Leila, Sabrine, Jinane, Asia, LeHaVy, Elsa, Zeina, Jawed, Myriam, Mohamed, Victor *etc.*

Je témoigne toute ma reconnaissance amicale à Islam BOUSSAADA (pour son soutien, son aide, ses conseils et sa bonne humeur). Un grand merci aussi aux informaticiens du L2S Celine (pour sa gentillesse et sa disponibilité) et Frédéric (pour son aide).

Ces remerciements ne peuvent s'achever, sans une pensée pour l'être qui a donné de sa vie et son âme pour que je puisse en arriver là : ma chère mère. Ses sacrifices, sa présence et ses encouragements sont pour moi les piliers fondateurs de ce que je suis et de ce que je fais. Je t'aime énormément maman. Que dieu te protège et te garde pour nous. Un très grand merci aussi à mon cher papa pour son amour, ses encouragements et ses sacrifices. Vient le moment de remercier mes deux frères que j'aime énormément. C'est grâce à eux que je suis là, leur soutien sans faille et tout ce qu'ils ont pu m'apporter pour franchir les obstacles les plus difficiles. Je vous aime. Je remercie aussi mon cher oncle "khalkhouli" pour son soutien et sa confiance en moi. il a toujours cru en mon potentiel et n'a jamais cessé de m'encourager. Mes chères cousines Asma (soumi), Ons (nousa), Olfa (founi) et Hajer (jenjen), merci pour votre présence dans ma vie. Je remercie aussi Mon oncle "salih" pour son aide et son soutien durant cette thèse. Mille mille merci à toute ma famille sans exception.

J'ai choisie de le laisser à la fin, mon cœur, mon trésor, mon amour : mon cher époux. Lui seul qui a subi mes moments de stress d'angoisse et de fatigue durant ces trois années de thèse. Il a su m'écouter, supporter ma mauvaise humeur et mon caractère insupportable. Il a été mon «beau soleil» et m'a apporté de la lumière dans ma vie pas très gaie à cette phase cauchemardesque qu'est la fin de thèse. Je le remercie pour son soutien quotidien indéfectible et son enthousiasme contagieux à l'égard de mes travaux comme de la vie en général. Notre couple a grandi en même temps que mon projet scientifique, le premier servant de socle solide à l'épanouissement du second. Je te remercie chéri pour ta patience, pour ton soutien, pour ta tendresse *etc.* tous simplement pour ton amour qui ne cesse pas de grandir.

Enfin, je pense à tous les amis et les gens que j'ai pu rencontrer depuis que je suis arrivée dans cette ville où il fait toujours gris. Ils ont par leur accueil réchauffé mon cœur de sympathie et ont rendu le climat plus acceptable.

Table des matières

Résumé	ii
Remerciements	iv
Liste des Figures	ix
Liste des tableaux	xii
Glossaire	xiii
Symboles	xiv

I Introduction	1
Historique	3
Motivation	4
Contexte de la thèse	5
Objectifs et contribution de la thèse	6
Organisation du manuscrit	7

II Préliminaires	10
-------------------------	-----------

1 Éléments de la Robotique	11
1.1 Géométrie et cinématique du déplacement	11
1.1.1 Transformation homogène	12
1.1.2 Situation d'un solide dans l'espace	17
1.2 Modélisation robotique	26
1.2.1 Modèle géométrique directe et inverse	26
1.2.2 Modélisation cinématique	39
1.2.3 Modélisation dynamique	47
2 Étude documentée sur la co-manipulation robotique	55
2.1 Co-manipulation	56
2.2 État de l'art	59
2.2.1 Compensation du poids de la charge	59

2.2.2	Programmation par démonstration (Lead-through programming)	60
2.2.3	Amplification de l'effort	61
2.2.4	Filtrage des tremblements	64
2.2.5	Les appareils virtuels	66
3	Les modèles de robots étudiés	72
3.1	Modélisation du Penducobot par application du Principe Fondamental de la Dynamique	72
3.1.1	Notations & nomenclature	72
3.1.2	Bilan des actions mécaniques extérieures	73
3.1.3	Application du principe fondamentale de la dynamique	80
3.1.4	Résumé	88
3.2	Modélisation du robot à deux bras sans charge pendulaire par application du Principe Fondamental de la Dynamique	89
3.2.1	Notations & nomenclature	89
3.2.2	Bilan des actions mécaniques extérieures	89
3.2.3	Principe Fondamentale de la dynamique :	96
3.2.4	Modélisation	104
3.2.5	Résumé	105
III	Co-manipulation homme-robot pour des tâches de manutention	106
1	Point de vue sur la co-manipulation	107
1.1	Les exigences de co-manipulation : compromis	107
1.2	La co-manipulation comme un problème de commande optimale	109
1.2.1	Notations	109
1.2.2	Formulation du problème de co-manipulation	110
1.3	Stratégie de commande	111
1.3.1	Le contrôle d'impédance : une solution à améliorer	111
1.3.2	Architecture de commande du cobot	112
1.3.3	Colinéarité entre la force et la vitesse de l'organe terminal	113
2	Génération en ligne de trajectoires	115
2.1	Introduction	115
2.1.1	Classification des trajectoires	115
2.1.2	La génération de trajectoire : état de l'art	118
2.2	Un générateur de trajectoire en ligne contrôlé par événement	120
2.2.1	Traitement de l'intensité de la force appliqué par l'opérateur	120
2.2.2	Profil de vitesse à Jerk minimal	122
2.2.3	Traitement de la direction de la force appliquée par l'opérateur	123
2.2.4	Algorithme récursif	124
3	Commande d'un robot en interaction : Cas de robots sous actionnés à charges pendulaires	126
3.1	Commande par anticipation et rétroaction	127
3.1.1	Commande basée sur l'inversion du modèle dynamique	127
3.1.2	Conception du correcteur	129

3.2	Application au Penducobot	130
3.2.1	Présentation du Penducobot	130
3.2.2	Adaptation du générateur de trajectoire au cas du Penducobot	132
3.2.3	Linéarisation autour d'un point d'équilibre	134
3.3	Résultats de simulation	136
3.3.1	Placement de pôle	136
3.3.2	Commande linéaire quadratique	139
4	Contrôle d'impédance modifié	143
4.1	Formulation du problème	144
4.2	Contrôle d'impédance basé sur la génération en ligne de trajectoire	145
4.3	Application au robot à deux bras	147
4.3.1	Adaptation du Générateur de trajectoire au cas du robot à deux bras	148
4.3.2	Résultats de simulation	149
5	Synthèse d'une commande LPV pour le problème de co-manipulation basé sur les conditions LMI	156
5.1	Introduction	156
5.2	La co-manipulation et les systèmes LPV	157
5.2.1	Les modèles LPV rationnels	158
5.2.2	Représentation descripteur d'un système LPV	158
5.2.3	Système descripteur augmenté pour la commande H_∞	159
5.2.4	Conditions LMI pour la synthèse H_∞	161
5.3	Application au robot à 2DDLs sans charge pendulaire	168
5.3.1	En absence de frottement	169
5.3.2	Obtention du modèle descripteur affine de la modélisation LFR	175
5.3.3	Système LPV augmenté pour le control H_∞	177
5.3.4	Détermination du filtre correspondant au cahier de charge	181
5.4	Application du théorème 7 pour le synthèse d'un control H_∞	183
5.5	Résultats de simulations	185
A	Les quaternions	189
B	Dérivée d'une matrice de rotation	193
C	Génération de trajectoire	195
D	Souplesse mécanique et contrôle d'impédance	201
E	Lemmes usuels en commande robuste	215
	Bibliographie	230

Table des figures

1.1	Passage d'un repère R_i à un repère R_f	12
1.2	Translation pure d'un repère R_f par rapport à un repère R_i	14
1.3	Rotation pure autour de l'axe x d'un repère R_f par rapport à un repère R_i	16
1.4	Rotation pure autour de l'axe y d'un repère R_f par rapport à un repère R_i	16
1.5	Rotation pure autour de l'axe z d'un repère R_f par rapport à un repère R_i	17
1.6	Coordonnées cartésiennes	19
1.7	Coordonnées cylindriques	19
1.8	Coordonnées sphériques	20
1.9	Les angles d'Euler (convention z, x, z)	22
1.10	Les angles de Bryant (convention x, y, z).	24
1.11	Les angles de roulis-tangage-lacet (convention z, y, x).	24
1.12	Les quaternions	26
1.13	Robot à structure ouverte simple	27
1.14	Paramètres géométriques : cas d'une structure ouverte simple.	28
1.15	Robot à structure ouverte arborescente.	31
1.16	Paramètres géométriques standards	32
1.17	Transformation entre le repère de l'organe terminal et R_f	36
1.18	Mouvement circulaire.	40
1.19	Système d'axes tournants.	41
1.20	Système d'axes mobiles : cas général	42
2.1	Un homme et un robot en collaboration pour transporter un objet volumineux dans un environnement contraint (à gauche) et démonstration de la façon dont un être humain peut interagir physiquement avec un manipulateur, pour enlever la portière d'une voiture : réalisation de la tâche de désassemblage (à droite) . .	56
2.2	Les 3 catégories de comanipulation : a) parallèle, b) orthétique et c) sérielle. . .	57
2.3	Exosquelette de membres inférieurs de l'université de Berkeley BLEEX (Berkeley Lower Extremity Exoskeleton).	58
2.4	Amplificateur de puissance de Kazerooni	60
2.5	Grue de levage Easy Arm du fabricant Gorbil, permettant une co-manipulation avec compensation active du poids de la charge.	60
2.6	programmation par démonstration (lead-through programming)	61
2.7	Le projet Hardiman mené par General Electric en 1969.	62
2.8	Le projet Extender du professeur Kazerooni en 1993.	63
2.9	Cobot pour la découpe de viande.	64
2.10	Robot MC^2E exploité en co-manipulation lors d'expériences in-vivo	65
2.11	Schéma de principe du système Micron pour l'assistance à la microchirurgie . .	66
2.12	Projet SteadyHand de l'université Johns Hopkins.	67

2.13	Le cobot scooter.	69
2.14	Système de co-manipulation acrobot.	70
2.15	Système de co-manipulation Surgicobot opérant sur un crâne en résine.	70
2.16	Le robot Mako's RIO TM .	71
2.17	Le robot WAM TM de Barrett Technology.	71
3.2	Robot à un bras, supportant une charge pendulaire.	73
3.3	Bras double.	90
1.1	Concept de la co-manipulation.	113
2.1	Les catégories de trajectoires (voir [1]).	116
2.2	Boucles de génération de mouvement. (a) : dans l'espace articulaire - (b) : dans l'espace opérationnel.	117
2.3	L'automate qui régit les états du mouvement.	120
2.4	Cycle périodique des phases.	122
2.5	Schéma bloc de l'algorithme récursif de génération de la trajectoire désirée.	125
3.1	Structure de commande d'un robot planaire avec un DDL passif.	128
3.2	Penducobot.	131
3.3	Code récursif.	133
3.4	Profil de vitesse désirée $\dot{\theta}_d$ généré par le traitement de la force F_h .	134
3.5	Suivi de trajectoire du DDL θ (en haut) du DDL φ (en bas) pour le système linéarisé.	137
3.6	Suivi de trajectoire du DDL θ (en haut) du DDL φ (en bas) pour le système non-linéaire.	138
3.7	Couple moteur $C_m(t)$ durant le suivi de trajectoire : système linéarisé (en haut) et système non-linéaire (en bas).	139
3.8	Suivi de trajectoire du système linéarisé (en haut) et du système non linéaire (en bas) - Cas des paramètres de pondération (Q_1, R_1) .	141
3.9	Suivi de trajectoire du système linéarisé (en haut) et du système non linéaire (en bas) - Cas des paramètres de pondération (Q_2, R_2) .	142
4.1	Structure du contrôle d'impédance modifié.	145
4.2	Bras double.	147
4.3	Mesure de la force F_h et de la vitesse correspondante de l'organe terminal : cas de la fausse co-manipulation.	149
4.4	Profil de la norme de la vitesse désirée, généré par la force F_h .	150
4.5	Suivi de position.	151
4.6	Suivi de vitesse.	151
4.7	Suivi d'accélération.	152
4.8	Erreur de suivi de position.	152
4.9	Erreur de suivi de vitesse.	153
4.10	Erreur de suivi d'accélération.	153
4.11	Couple moteur τ_{m1} et τ_{m2} durant le suivi de trajectoire.	154
4.12	Colinéarité entre la force de l'opérateur \vec{F}_h et la vitesse de l'organe terminal \vec{X} .	154
5.1	Commande H_∞ du robot	168
5.2	Schéma block de la représentation d'état du filtre	178

5.3	Structure de commande choisie	180
5.4	Suivi de position.	186
5.5	Suivi de vitesse.	187
5.6	Colinéarité entre la force de l'opérateur \vec{F}_h et la vitesse de l'organe terminal \vec{X}	188
C.1	L'abscisse curviligne orientée	196
C.2	Un chemin interpolé (a) et un chemin approché (b).	196
D.1	Classification de la souplesse passive	205
D.2	Classification des méthodes de commande de souplesse active	206
D.3	Contrôle d'amortissement	209
D.4	Contrôle de raideur	209
D.5	Contrôle d'impédance basé sur la position dans l'espace des tâches	212
D.6	Contrôle d'impédance basé sur la force dans l'espace des tâches	213
E.1	Représentation linéaire fractionnaire $F_u(G(s);H(s))$	223
E.2	Représentation linéaire fractionnaire $F_e(G(s);H(s))$	223
E.3	Modèle LFR.	224

Liste des tableaux

2.1	Expression du profil de vitesse dépendante de la phase.	123
-----	---	-----

Glossaire

MGD	Modèle Géométrique Direct
MGI	Modèle Géométrique Inverse
MDD	Modèle Dynamique Direct
MDI	Modèle Dynamique Inverse
MCD	Modèle Cynématique Direct
MCI	Modèle Cynématique Inverse
DH	Denavit Hartenberg
LFR	Linear Fractional Representation : Représentation linéaire fractionnaire
LFT	Linear Fractional Transformation : Transformation linéaire fractionnaire
LMI	Linear Matrix Inequality : Inégalité matricielle linéaire
LPV	Linear Parameter Varying : Linéaire à paramètres variants
LTI	Linear Time Invariant : Linéaire et invariant dans le temps
SDP	Semi Definite Programming : Programmation semi-définie

Symboles

ω	vitesse angulaire	rads^{-1}
\wedge	produit vectoriel	
\cdot	produit scalaire	
τ	le vecteur des couples des actionneurs	
τ_h	le vecteur des couples de l'opérateur humain	
q	le vecteur des coordonnées articulaires	
\dot{q}	le vecteur des vitesses articulaires	
\ddot{q}	le vecteur des accélérations articulaires	
q^a	le vecteur des coordonnées articulaires actionnées	
q^p	le vecteur des coordonnées articulaires passives	
f_e	le vecteur des forces de l'environnement	
\mathcal{K}	l'énergie cinétique	
\mathcal{U}	l'énergie potentielle	
$\mathcal{L}(q, \dot{q})$	le Lagrangien	
$M(q)$	la matrice d'inertie	
$C(q, \dot{q})\dot{q}$	est le vecteur contenant les forces centrifuges et de Coriolis	
$g(q)$	est le vecteur de forces dues à la gravité	
E_p	Erreur statique	
M_m	Marge de module	
f_{th}	seuil de force	

Première partie

Introduction

Introduction

Sommaire

1.1 Géométrie et cinématique du déplacement	11
1.1.1 Transformation homogène	12
1.1.1.1 Matrice de transformation homogènes : cas de translation pure	13
1.1.1.2 Matrice de transformation homogène : cas de rotation pure	14
1.1.2 Situation d'un solide dans l'espace	17
1.1.2.1 Propriétés des matrices de transformation homogène	17
1.1.2.2 Description de la position d'un solide	18
1.1.2.3 Orientation d'un solide	21
1.2 Modélisation robotique	26
1.2.1 Modèle géométrique directe et inverse	26
1.2.1.1 Paramétrage de Denavit-Hartenberg modifié	27
1.2.1.1.1 Cas des robots à chaîne ouverte simple [21]	27
1.2.1.1.2 Cas des chaînes arborescentes	30
1.2.1.2 Calcul du modèle géométrique direct d'un robot	33
1.2.1.3 Modèle géométrique inverse	34
1.2.1.3.1 Position du problème : méthodes de Pieper et Paul [21]	35
1.2.1.3.2 Existence et nombre de solutions du problème inverse	37
1.2.1.3.3 Exemple de calcul du modèle géométrique inverse	37
1.2.2 Modélisation cinématique	39
1.2.2.1 Mouvement Circulaire	40
1.2.2.2 Système d'axes tournants	40
1.2.2.3 Systèmes d'axes mobiles dans le cas général : lois de composition de vitesses	41

1.2.2.4	Modèle cinématique direct	43
1.2.2.4.1	Jacobien géométrique	44
1.2.2.4.2	Jacobien analytique	44
1.2.2.5	Modèle cinématique inverse	45
1.2.2.5.1	Singularité	46
1.2.3	Modélisation dynamique	47
1.2.3.1	Formulation de Newton-Euler	48
1.2.3.2	Formulation de Lagrange	49
1.2.3.3	Forme Générale du modèle dynamique	50
1.2.3.4	Propriétés du modèle dynamique	51
1.2.3.4.1	Matrice d'inertie	51
1.2.3.4.2	Matrice des Forces Centrifuges et de Coriolis	52
1.2.3.4.3	Le vecteur de forces gravitationnelles	53

Historique

Le concept de robot date de plusieurs siècles, mais le terme robot fut inventé par le tchèque Karel Capek dans une pièce de théâtre écrite en 1920 : "RUR ou les robots universels de Rossum". Ce terme est dérivé du verbe tchèque "robota" signifiant travail forcé ou corvée.

Il est certain que depuis fort longtemps, les réalisateurs d'automates ont cherché à pouvoir insuffler à leurs machines des comportements adaptés aux circonstances. Malheureusement, jusqu'au vingtième siècle, les techniques étaient trop primitives pour permettre de telles réalisations. Il a fallu attendre les fin des années cinquante pour que Georges Devol invente une machine originale polyvalente et reprogrammable, ce qui a permis au robot d'acquérir une réalité industrielle. Ce robot, appelé Unimate, était capable de manipuler des objets avec des actionneurs hydrauliques. Le fabricant de voitures américain General Motors sera le premier à installer ce bras articulé dans l'une de ses usines en 1961. L'Unimate a alors pour tâche de saisir des pièces de métal chaudes et de les empiler, une tâche particulièrement éprouvante pour les ouvriers. A cette époque, aucun ordinateur ne guide les mouvements de ce robot : ses instructions lui viennent d'un disque magnétique.

Après ce premier galop d'essai, ce ne fut que vers la fin des années 1970 que les robots industriels de première génération ont vu le jour. À partir de cette date, la course à la robotique

industrielle va se mettre en place et chaque année de nouveaux secteurs industriels s'ouvrent à la robotisation au fur et à mesure que les équipements se diversifient, deviennent plus adaptés et surtout meilleur marché. Les robots sont devenus tellement indispensables dans certains secteurs industriels (l'automobile par exemple), que leur emploi conditionne la survie économique des entreprises. Il est alors devenu indispensable de maîtriser leurs technologies.

Motivation

Les robots sont des machines fabuleuses en ce sens qu'ils peuvent travailler rapidement, précisément et sans jamais se fatiguer. Il n'est donc pas étonnant qu'ils aient envahi les entreprises manufacturières, prenant part à la fabrication d'un très grand nombre de produits. Reprogrammables, versatiles et puissants, les robots possèdent cependant un important défaut : ils ne sont pas intelligents. En effet, malgré les développements en intelligence artificielle et ce que la science fiction aimerait nous faire croire, les robots ne sont en général que des machines pouvant exécuter une liste d'opérations décrites en détails par un humain. C'est pourquoi les robots industriels travaillent dans des environnements où tout est contrôlé.

L'interaction Homme-robot HRI est un sous-domaine de la robotique qui cherche à comprendre et à façonner la manière dont les humains et les robots devraient interagir les uns avec les autres. C'est un axe d'étude relativement récent. On peut distinguer deux types d'interaction [2] :

- l'interaction distante : l'homme et le robot ne partagent pas le même espace physique comme par exemple dans le cas de la téléopération chirurgicale, l'interaction entre le chirurgien et le robot est distante (contrairement à celle entre le patient et le robot) ;
- l'interaction de proximité : le robot et l'humain partagent le même espace de travail physique.

On distingue aussi l'interaction cognitive de l'interaction physique :

- l'interaction cognitive CHRI correspond à l'interaction verbale ou gestuelle ;
- l'interaction physique PHRI est lorsque l'Homme et le robot rentrent en contact. Ce contact est soit prévu (échange d'objet, coopération pour réaliser une tâche) soit imprévu (collision).

Contexte de la thèse

Un robot est une machine capable de s'adapter et d'agir sur son environnement, même complexe en remplaçant l'humain ou en étendant certaines de ses fonctions. Un robot est composé d'une mécanique possédant un certain nombre de degrés de libertés motorisées (un degré de liberté étant la capacité d'un système à se mouvoir selon un axe de translation ou de rotation) que lui permet certains mouvements. Il est composé également de capteurs dont une partie sert au robot à connaître son propre état et à assurer son fonctionnement et l'autre partie à connaître son environnement de façon à pouvoir réaliser correctement une tâche. À cela, s'ajoute un certain nombre de systèmes électroniques avec une partie de puissance visant à alimenter les différents actionneurs et capteurs et une partie de traitement du signal afin d'interpréter les informations des capteurs et générer en fonction de cela les différentes commandes.

la PHRI est actuellement l'un des secteurs les plus investis avec de nombreuses recherches, une forte diversité des produits depuis les robots d'aide à la marche ou à la saisie, jusqu'au robot d'assistance, une véritable auxiliaire de vie en cours d'élaboration aujourd'hui. Les robots utilisés dans la PHRI seront conçus pour coexister et coopérer avec les humains dans des applications ayant pour fins médicales [3] ou thérapeutiques [4], de manutention dans l'industrie [5, 6], d'assistance au geste [7] ou même de divertissement [8].

Les travaux de cette thèse se focalisent sur la co-manipulation robotique connue aussi sous le nom de la cobotique. Il s'agit d'une branche de la robotique qui vise au développement de robots, appelés cobots, où l'homme et le robot interagissent physiquement et sans interface, dans une relation de type maître-à-esclave, en vue de réaliser conjointement des tâches de manutention, d'assistance au geste, *etc* [6, 9–11]. L'interaction homme-robot se traduit par un échange mutuel d'informations, un concept introduit et décrit par Kazerooni dans [12]. En effet, l'opérateur applique au robot une force de faible puissance, pour exprimer sa volonté de mettre en mouvement ce dernier et l'amener à une position désirée. Le robot mesure quant à lui cette force, l'interprète puis actionne ses moteurs afin de conformer sa position à celle désirée par l'opérateur. En effet les êtres humains sont qualifiés pour des tâches complexes et sont capables de réagir de manière très flexible, à des situations inconnues. Les robots industriels sont très forts, rapides et précis. Il est important de noter la différence entre les fréquences avec lesquelles un être humain et le robot peuvent effectuer leurs tâches. Des études de Miyhoshi et Murata [13] ont montré que l'homme peut accomplir une tâche avec une fréquence allant jusqu'à 6Hz qui est beaucoup plus

lente que la fréquence d'échantillonnage typique utilisée dans un schéma de contrôle robotique. Au cours de la PHRI, les compétences des deux doivent être combinées et le mouvement coopératif résultant doit être vraiment intuitif et ne devraient en aucun cas restreindre le mouvement humain. Ceci est souvent qualifié de transparence. Il y a encore de nombreux défis sur le chemin de la réalisation d'une interaction physique efficace [14]. Ces difficultés sont principalement liées à la sécurité (stabilité) et au développement des capacités du robot.

Objectifs et contribution de la thèse

Ce travail de thèse aborde le problème de la co-manipulation pour les tâches de manutention de charges lourdes à travers un point de vue que nous ne considérons pas suffisamment exploré dans la littérature, même s'il utilise des outils classiques de la robotique. Un champ d'application potentiel des stratégies proposées dans ce travail est l'industrie de fabrication tels que l'industrie de la construction et de montage où la manutention exige que l'opérateur humain exerce des efforts considérables. L'objectif principal est d'établir des tâches de co-manipulation qui soient intuitives pour l'homme, robuste et qui permette de réduire les efforts fournis par l'opérateur et en diminuant le temps consommé ainsi que les coûts de ces activités.

Le point de vue proposé repose sur la mise en œuvre d'un générateur de trajectoire en ligne (OTG) spécifique, associé à une boucle de rétroaction cinématique. Ce générateur est conçu de manière à traduire les intentions de l'opérateur humain en trajectoires idéales que le robot doit suivre. Il fonctionne comme un automate à deux états de mouvement, dont les transitions sont commandées par la comparaison de l'amplitude de la force d'interaction à un seuil réglable, afin de permettre à l'opérateur de maintenir l'autorité sur les états de mouvement du robot. Le point de vue sur la co-manipulation, proposé dans cette thèse, est basé sur un constat : l'unique information permettant d'indiquer au robot la direction de déplacement désirée, mais aussi les phases de mise en mouvement ou d'arrêt du robot, est celle provenant de la force que l'opérateur exerce sur le robot. Pour assurer la fluidité de l'interaction, nous proposons de générer un profil de vitesse colinéaire à la force appliquée au point d'interaction. Cette idée clef de colinéarité constitue le point de départ des contributions de cette thèse.

La différence majeure entre l'approche proposée et d'autres travaux traitant de l'interaction physique homme-robot réside dans la formulation des objectifs de commande recherchés. Ces objectifs sont basés sur le concept clé que la vitesse du point d'interaction devrait rester colinéaire

à chaque instant à la force exercée par l'opérateur humain tout en étant d'amplitude modérée. Le critère de colinéarité concourt à réaliser une partie de l'exigence de transparence alors que celui de vitesse d'amplitude modérée permet de répondre en partie à l'exigence de la sécurité.

Comme est indiqué dans le titre de ce mémoire de thèse, « Formulation et étude des problèmes de commande en co-manipulation robotique », le gros travail est d'arriver à formuler les problèmes de co-manipulation et mettre en oeuvre les exigences et les complexités de chaque tâches. Chercher à comprendre et à façonner les meilleures solutions de la co-manipulation robotique, sont les objectifs essentiels de notre recherche. En effet, une profonde analyse des exigences de la co-manipulation a été réalisé durant cette thèse, pour arriver à formuler un problème de commande optimale contraint. La résolution de ce problème permettra de répondre aux exigences de la PHRI.

Plan de lecture du mémoire

Ce mémoire de thèse est organisé de manière à ce que le lecteur arrive très rapidement à la description des contributions. Une étude bibliographique approfondie, indispensable pour comprendre la construction des modèles, la formulation du problème ainsi que le choix des structures de commandes appropriées, a été établie durant cette thèse, constituant alors le premier chapitre de la partie « Préliminaires ». Le lecteur familier avec les notions fondamentales de la robotique pourra alors survoler ce chapitre. Il pourra en revanche s'attarder sur la lecture du deuxième chapitre qui propose une étude documentée sur le domaine spécifique de la co-manipulation homme-robot. Le principe de la co-manipulation ainsi que les différentes fonctions qu'elle permet d'envisager sont présentés dans ce chapitre. Le troisième chapitre est l'occasion de présenter les architectures et les modélisations des robots, en interaction physique avec l'opérateur humain, étudiés dans cette thèse.

La troisième partie de ce manuscrit, rassemble tous les chapitres qui constituent nos différentes contributions scientifiques :

- Dans le premier chapitre, une analyse des exigences de co-manipulation et de leurs conséquences sur le choix des trajectoires désirées ainsi que sur la formulation du problème est considérée. Un intérêt particulier dans ce chapitre est porté à la formulation mathématique du problème de co-manipulation, vu comme un problème de commande optimale contraint. La stratégie de commande basée sur le critère de colinéarité entre la force d'interaction et la

vitesse de l'organe terminal est présentée. Cette stratégie de commande s'appuie sur la mise en œuvre simultanée de deux fonctions au sein d'une même structure de commande :

1. la génération d'une trajectoire appropriée suivant un profil cinématique compatible avec les capacités de l'opérateur et les exigences de sécurité dues à sa présence.
 2. la mise en œuvre d'un correcteur qui garantisse le suivi de la trajectoire générée en temps réel.
- Le deuxième chapitre est complètement consacré à la description du générateur spécifique de trajectoires. Ce générateur en ligne contrôlé par événements est expliqué en détails tout au long de ce chapitre.
 - Le troisième chapitre traite le cas des robots sous actionnés à charge pendulaire. Un champ d'application potentiel de la stratégie, proposée dans ce chapitre, est l'industrie manufacturière telles que l'industrie de construction et d'assemblage où les tâches de manutention exigent des efforts considérables. L'adaptation du générateur de trajectoire en ligne, décrit dans le chapitre 2, aux architectures des robots considérés ainsi que la conception du correcteur font l'objet de ce chapitre. Cette approche est discutée en détail à travers l'exemple démonstratif du Penducobot.
 - Le quatrième chapitre présente une méthode de contrôle d'impédance modifiée qu'on appelle contrôle d'impédance basé sur la génération en ligne de trajectoire (en anglais Online Trajectory-Based Impedance Control (OTBIC)). Cette méthode vise principalement à surmonter ces limites tout en répondant aux attentes de la co-manipulation en termes d'assistance en effort et de transparence en fonctionnement, tout en garantissant la sécurité. Cette approche est appliquée au cas du robot à deux degrés de libertés.
 - Le problème de la co-manipulation robotique, tel que formulé dans cette thèse peut être vu comme un problème de manipulation classique associé au générateur spécifique de trajectoire. Les travaux pionniers d'Adams et al. [15], exploités récemment par Halalchi et al. [16, 17], traitant les problèmes de modélisation et de commande LPV des robots, ont montré leur efficacité. Ce cadre permet la synthèse de lois de commande avec des garanties préalables de performance et de robustesse. Ce cinquième chapitre traite de la modélisation *quasi-LPV* des robots en interaction avec un opérateur humain ainsi que la synthèse de correcteurs LPV basés sur un modèle LPV du système, ayant une dépendance paramétrique rationnelle. Une méthode de synthèse de correcteurs LPV articulaires avec garantie de performance en gain \mathcal{L}_2 est proposée. Elle se base sur la modélisation équivalente du système de co-manipulation sous forme LPV descripteur. Cette approche est appliquée au robot à deux degrés de libertés.

Liste des publications

Les trois premiers chapitres de la partie contribution ont fait l'objet de deux articles de conférences et un journal publié :

Conférences internationales avec actes

- Jlassi, S., Tliba, S. , Chitour, Y., 2012. On Human-Robot Co-Manipulation for Handling Tasks : Modeling and Control Strategy. Valamar Lacroma, Dubrovnik, Croatia, 10th IFAC Symposium on Robot Control (SYROCO), pp. 710-715.
- S. Jlassi, S. Tliba, and Y. Chitour. Sur la comanipulation homme-robot pour des tâches de maintenance. Proc. of Conférence International Francophone d'Automatique, CIFA 2012, Grenoble, France, IEEE, 115, July 4-6 2012.

Le chapitre "Contrôle d'impédance modifié" fait l'objet d'un article conférence :

- Jlassi, Sarra ; Tliba, Sami ; Chitour, Yacine, An Online Trajectory generator-Based Impedance control for co-manipulation tasks, Haptics Symposium (HAPTICS), 2014 IEEE , vol., no., pp.391,396, 23-26 Feb. 2014 keywords : Co-manipulation ;Impedance control ;Online trajectory generation ;Physical human-robot interaction.

Article de Revue

- Jlassi, S., Tliba, S. , Chitour, Y., 2013. An Event-Controlled Online Trajectory Generator Based on the Human-Robot Interaction Force Processing. Industrial Robot : An International Journal, Emerald Group Publishing.

Le dernier chapitre fait l'objet d'un article journal en cours de préparation :

Article de Revue en préparation Jlassi, S., Tliba, S. , Chitour, Y. Towards online trajectory generation and linear parameter varying control system for Human-Robot Co-manipulation

Deuxième partie

Preliminaires

Chapitre 1

Éléments de la Robotique

Sommaire

2.1	Co-manipulation	56
2.2	État de l'art	59
2.2.1	Compensation du poids de la charge	59
2.2.2	Programmation par démonstration (Lead-through programming)	60
2.2.3	Amplification de l'effort	61
2.2.3.1	Amplification de l'effort appliqué par l'opérateur	61
2.2.3.2	Amplification de l'effort ressenti par l'opérateur	64
2.2.4	Filtrage des tremblements	64
2.2.5	Les appareils virtuels	66
2.2.5.1	Les guides virtuels	67
2.2.5.2	Les butées virtuelles	69

1.1 Géométrie et cinématique du déplacement

La conception et le contrôle des robots nécessitent certains modèles mathématiques, tels que :

- Les modèles de transformation entre l'espace opérationnel (dans lequel la position de l'organe terminal est définie) et l'espace des articulations. On distingue :
 - les modèles géométriques directes et inverses donnant la localisation de l'organe terminal en termes des coordonnées articulaire du mécanisme et *vice-versa*,

- Les modèles cinématiques directes et inverses permettant d’avoir la vitesse de l’organe terminal en fonction des vitesses articulaires et *vice-versa*.
- Les modèles dynamiques donnant les relations entre les couples ou les forces exercés par les actionneurs et les positions, vitesses et accélérations des articulations.

L’étude de la robotique nécessite des connaissances de base en géométrie et en cinématique. Lorsque l’on désire commander un robot, il est nécessaire de situer ses différentes parties mobiles les unes par rapport aux autres. Pour ce faire, on associe un repère à chaque partie du robot (socle, effecteur, articulations). Le passage d’un repère à un autre (position, orientation) s’exprime sous la forme d’une matrice de passage. La géométrie, et plus particulièrement les coordonnées et transformations homogènes sont des outils indispensables et très utilisés en robotique, qui font l’objet d’une partie de ce chapitre. La cinématique du déplacement, à travers la loi de composition des vitesses, fait également partie des bases de la robotique. Elle est abordée dans ce qui suit.

1.1.1 Transformation homogène

Dans le cas d’une transformation homogène, le type de représentation est matriciel. Le passage d’un repère initial R_i à un repère final R_f s’exprime par l’intermédiaire d’une matrice M , appelée **matrice de changement de repère, matrice de passage ou matrice de transformation homogène** (voir Fig.1.1) Cette matrice de dimension (4×4) , notée ${}^iM^f$ s’exprime sous la

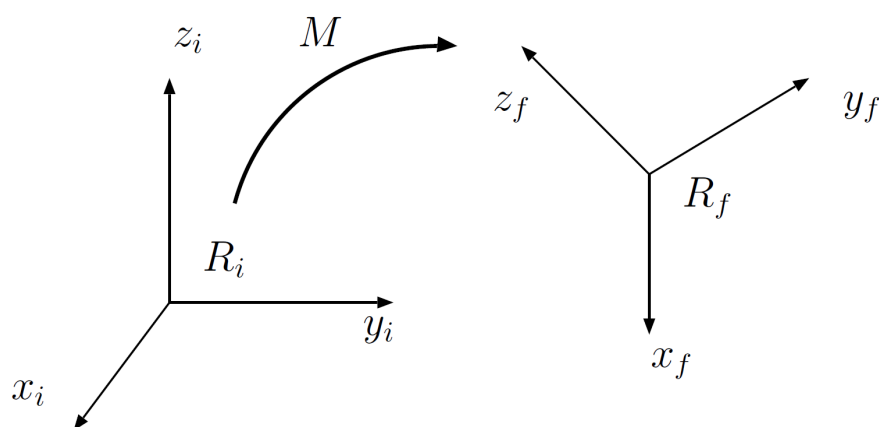


FIGURE 1.1 – Passage d’un repère R_i à un repère R_f

forme :

$${}^i T_f = {}^i M_f = \begin{pmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^i R_f & {}^i P_f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.1.1.1})$$

où ${}^i s_j$, ${}^i n_j$ et ${}^i a_j$ sont les vecteurs unitaires, suivant les axes x_j, y_j et z_j du repère R_j exprimé dans le repère R_i , où ${}^i P_j$ est le vecteur exprimant l'origine du repère R_j dans le repère R_i et avec :

- ${}^i R_f$: matrice (3×3) des rotations donnant l'orientation notée ${}^i A_f$ (de R_f dans R_i).
- ${}^i P_f$: matrice (3×3) des translations donnant la position

$${}^i M_f = \begin{pmatrix} {}^i R_f & {}^i P_f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^i A_f & {}^i P_f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_3 & {}^i P_f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} {}^i A_f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1.1.2})$$

A l'aide de la matrice ${}^i M_f$, il est possible d'exprimer les coordonnées d'un point quelconque P de l'espace dans le repère R_i à partir de ces coordonnées homogènes exprimées dans le repère R_f par la relation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}_{R_i} = {}^i M_f \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}_{R_f} = \begin{pmatrix} {}^i R_f & {}^i P_f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}_{R_f}. \quad (\text{II.1.1.3})$$

1.1.1.1 Matrice de transformation homogènes : cas de translation pure

Lorsque deux repères sont uniquement liés par une translation, il est possible de passer de l'un à l'autre en utilisant une matrice de transformation homogène de translation pure. Nous utiliserons les notations suivantes :

- $Trans(a, b, c)$ pour indiquer une translation (a selon l'axe x , b selon l'axe y et c selon l'axe z).
- $Trans(x, a)$ pour indiquer une translation a selon l'axe x .
- $Trans(y, b)$ pour indiquer une translation b selon l'axe y .
- $Trans(z, c)$ pour indiquer une translation c selon l'axe z .

Considérons une translation T composée de :

- d'une translation a selon l'axe $x \rightarrow Trans(a, 0, 0) = Trans(x, a)$,
- d'une translation b selon l'axe $y \rightarrow Trans(0, b, 0) = Trans(y, b)$,
- d'une translation c selon l'axe $z \rightarrow Trans(0, 0, c) = Trans(z, c)$.

La Figure 1.2 montre un exemple de cette translation, associée à la matrice de transformation homogène de translation pure iM_f . Les matrices de translation sont liées par la relation suivante :

$$\begin{aligned} Trans(a, b, c) &= Trans(a, 0, 0) \cdot Trans(0, b, 0) \cdot Trans(0, 0, c), \\ &= Trans(x, a) \cdot Trans(y, b) \cdot Trans(z, c). \end{aligned} \quad (\text{II.1.1.4})$$

La matrice de transformation homogène de translation pure iM_f associée à cette translation s'exprime alors :

$$M = \begin{pmatrix} & a \\ I_3 & b \\ & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & a \\ I_3 & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & 0 \\ I_3 & b \\ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & 0 \\ I_3 & 0 \\ & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1.1.5})$$

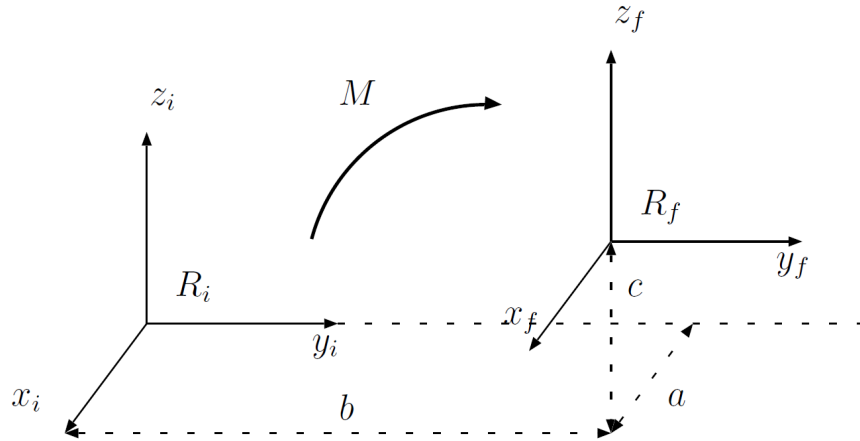


FIGURE 1.2 – Translation pure d'un repère R_f par rapport à un repère R_i

1.1.1.2 Matrice de transformation homogène : cas de rotation pure

Lorsque deux repères sont uniquement liés par une rotation, il est possible de passer de l'un à l'autre en utilisant une matrice de transformation homogène de rotation pure. Nous utiliserons les notations suivantes :

- $Rot(x, \theta_x)$ pour indiquer une rotation (θ_x autour de l'axe x),
- $Rot(y, \theta_y)$ pour indiquer une rotation (θ_y autour de l'axe y),
- $Rot(z, \theta_z)$ pour indiquer une rotation (θ_z autour de l'axe z).

Dans la matrice de transformation homogène, la rotation est décrite par la matrice R présentée dans l'équation (II.1.1.1). Lorsque la rotation est nulle autour des trois axes, R devient la matrice identité (c'est le cas pour les rotations pures) :

$$R = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1.1.6})$$

Exemple 1.1.1.

Une rotation θ_x autour de l'axe x est définie comme suit : (cf. Figure 1.3)

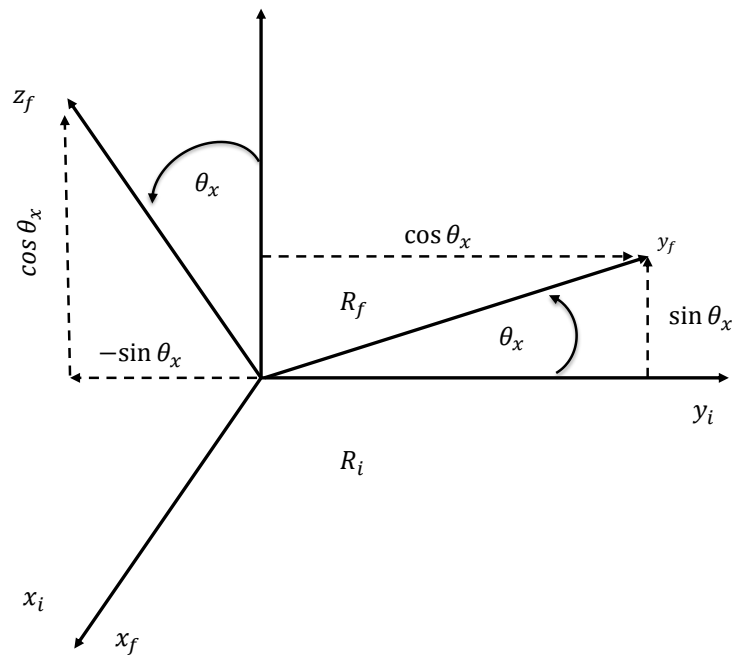
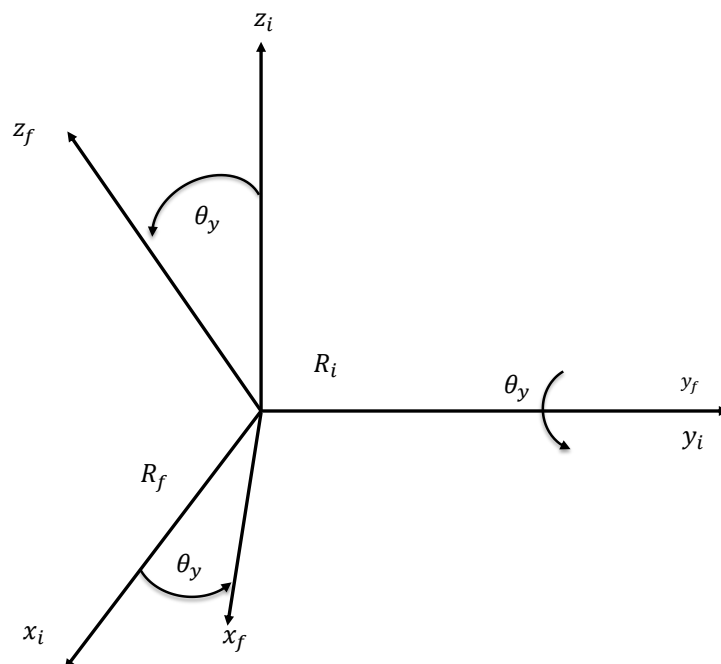
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix}, \quad (\text{II.1.1.7})$$

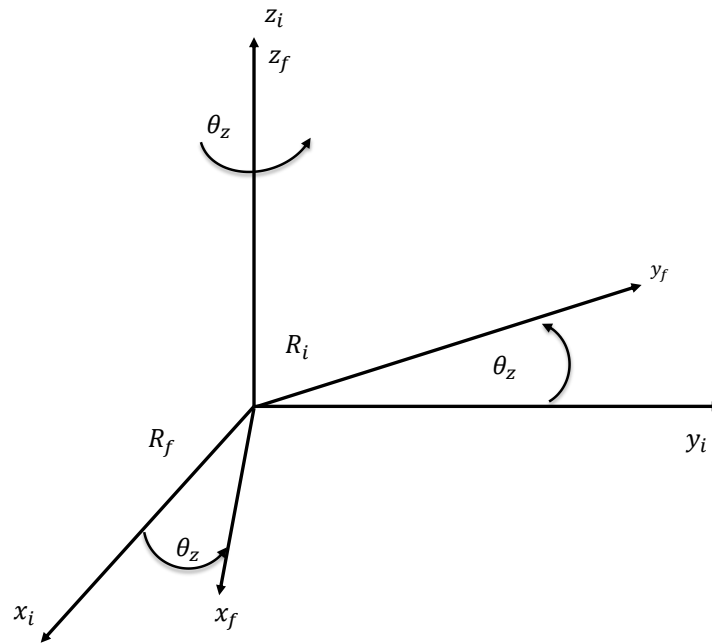
Une rotation θ_y autour de l'axe y est définie comme suit : (cf. Figure 1.4)

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{pmatrix}, \quad (\text{II.1.1.8})$$

Une rotation θ_z autour de l'axe z est définie comme suit : (cf. Figure 1.5)

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1.1.9})$$

FIGURE 1.3 – Rotation pure autour de l'axe x d'un repère R_f par rapport à un repère R_i FIGURE 1.4 – Rotation pure autour de l'axe y d'un repère R_f par rapport à un repère R_i

FIGURE 1.5 – Rotation pure autour de l'axe z d'un repère R_f par rapport à un repère R_i

1.1.2 Situation d'un solide dans l'espace

La situation d'un solide, c'est-à-dire la position et l'orientation, dans l'espace est exprimée par une matrice de transformation homogène T de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.1.1.10})$$

avec :

- A matrice (3×3) des rotations donnant l'orientation du solide dans un repère fixe R_0 ,
- P matrice (3×1) des translations donnant la position du solide dans un repère fixe R_0 .

1.1.2.1 Propriétés des matrices de transformation homogène

Propriété 1.1.1. La matrice de rotation A est orthogonale :

$$A^{-1} = A^T. \quad (\text{II.1.1.11})$$

Propriété 1.1.2. Soit la matrice ${}^i T_j$ de transformation homogène prenant le repère R_i pour l'amener sur le repère R_j . Si ${}^j T_i$ est la matrice de transformation homogène prenant le repère R_j pour l'amener sur le repère R_i , alors ${}^i T_j$ et ${}^j T_i$ sont liés par la relation :

$$({}^j T_i)^{-1} = {}^i T_j. \quad (\text{II.1.1.12})$$

Propriété 1.1.3. L'inverse d'une matrice de transformation homogène peut être mis sous la forme :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} A^T & -A^T \cdot P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1.1.13})$$

Propriété 1.1.4. Si un repère R_0 a subi K transformations consécutives, et si la i^{me} , ($i = 1, 2, \dots, k$) est définie par rapport au repère R_{i-1} , alors :

$${}^0 T_k = {}^0 T_1 \cdot {}^1 T_2 \cdot {}^2 T_3 \cdot {}^3 T_4 \dots {}^{k-1} T_k. \quad (\text{II.1.1.14})$$

Propriété 1.1.5. Dans le cas de transformations consécutives autour du même axe u , ce dernier reste inchangé par la transformation :

$$\text{Rot}(u, \theta_1) \cdot \text{Rot}(u, \theta_2) = \text{Rot}(u, \theta_1 + \theta_2), \quad (\text{II.1.1.15})$$

et

$$\text{Trans}(u, d) \cdot \text{Rot}(u, \theta_1) = \text{Rot}(u, \theta_1) \cdot \text{Trans}(u, d). \quad (\text{II.1.1.16})$$

1.1.2.2 Description de la position d'un solide

La position de l'origine d'un repère lié à un solide R_n , par rapport à un repère de référence R_0 , peut être définie par différents types de coordonnées :

- **Coordonnées cartésiennes** : C'est la méthode la plus générale. Elle donne directement les composantes du vecteur de position P . Cette représentation est utilisée lorsque la structure du robot est cartésienne (par exemple : robot cartésien AFMA, Acma, IBM-7565...). La Figure

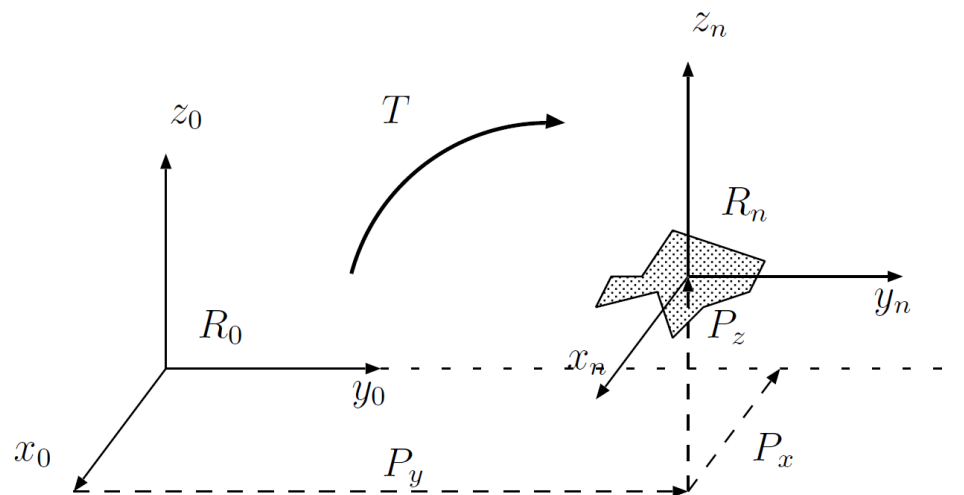


FIGURE 1.6 – Coordonnées cartésiennes

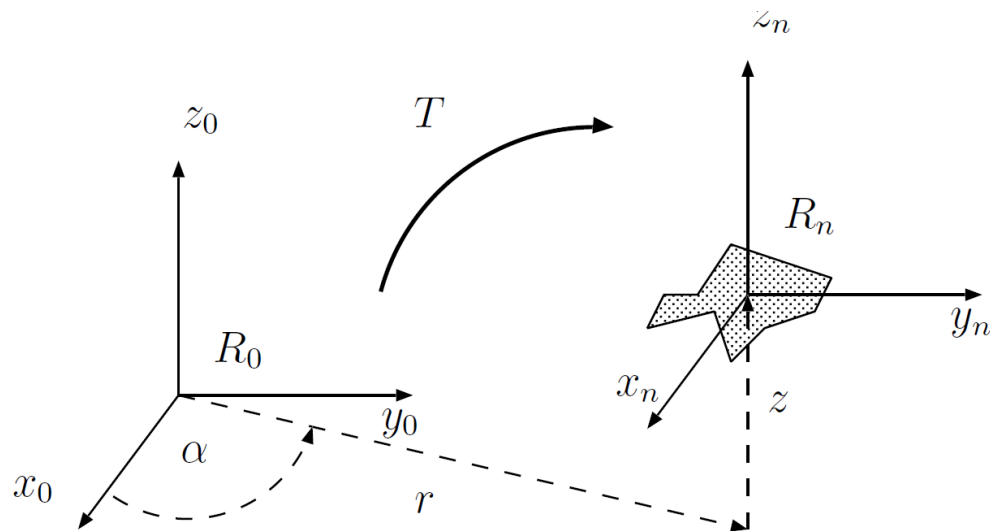


FIGURE 1.7 – Coordonnées cylindriques

1.6 illustre cette représentation. La matrice de position est la suivante :

$$P_{car} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}. \quad (\text{II.1.1.17})$$

- **Coordonnées cylindriques** : Cette représentation est utilisée lorsque la structure du robot est cylindrique (par exemple : robot Acma TH8, Cincinnati-T3,...). La Figure 1.7 illustre cette

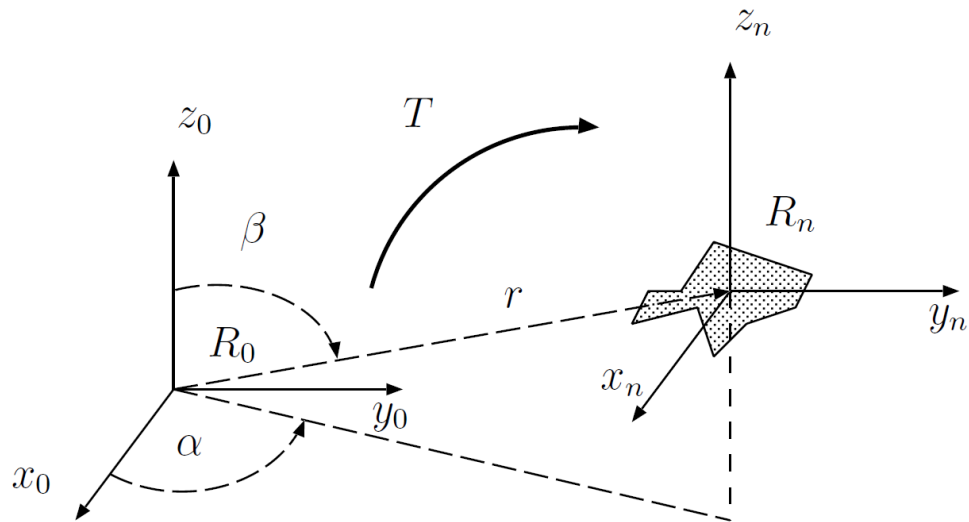


FIGURE 1.8 – Coordonnées sphériques

représentation. La matrice de position est la suivante :

$$P_{cyl} = \begin{bmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \\ z \end{bmatrix}. \quad (\text{II.1.1.18})$$

On peut exprimer les coordonnées cylindriques en fonction des coordonnées cartésiennes par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{P_x^2 + P_y^2}, \\ \alpha &= \text{atan2}(P_y, P_x), \\ z &= P_z, \end{aligned} \quad (\text{II.1.1.19})$$

où la fonction *atan2* permet le calcul de l'arc-tangente à partir de deux arguments.

La solution α appartient à $[-180, 180]$, le quadrant étant fixé par l'analyse du signe de P_x et de P_y . Seul les cas $P_x = 0$ et $P_y = 0$ constituent une singularité (impossibilité de solution).

- **Coordonnées sphériques** : Cette représentation est utilisée lorsque la structure du robot est sphérique (par exemple : robot Unimation (1000/2000/4000), PSA (BARNABE) , Stanford,...).

La Figure 1.8 illustre cette représentation. La matrice de position est la suivante :

$$P_{sph} = \begin{bmatrix} r \cos \alpha \sin \beta \\ r \sin \alpha \sin \beta \\ r \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (\text{II.1.1.20})$$

On peut exprimer les coordonnées sphériques en fonction des coordonnées cartésiennes, par les relations qui suivent :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}, \\ \alpha &= \text{atan2}(P_y, P_x), \text{ si } \beta \neq 0 \text{ où } \alpha = 0 \text{ si } \beta = 0, \\ \alpha &= \text{atan2}\left(\frac{P_y}{\sin \alpha}, P_z\right), \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ où } \beta = \text{atan2}(P_x, P_z) \text{ si } \alpha = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.1.1.21})$$

1.1.2.3 Orientation d'un solide

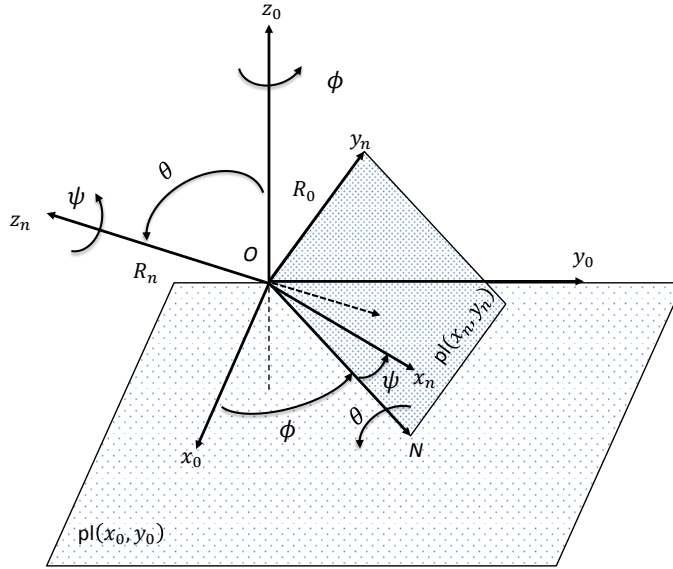
Pour décrire l'orientation d'un solide, le choix de trois paramètres se révèle parfois difficile. Les méthodes les plus utilisées sont les suivantes :

- les cosinus directeurs,
 - les angles d'Euler,
 - les angles de Bryant,
 - les angles Roulis-Tangage-Lacet,
 - les paramètres d'Euler (ou Olingue-Rodrigues, quaternions).
- **les cosinus directeurs** : La description de l'orientation d'un solide par les cosinus directeurs est donnée par les trois vecteurs \underline{s} , \underline{n} et \underline{a} constituant 9 éléments appelés cosinus directeurs. La matrice d'orientation est la suivante :

$$\begin{pmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1.1.22})$$

La connaissance de deux vecteurs choisis parmi les 3 est suffisante (le troisième est obtenu par le produit vectoriel des deux autres). 3 composantes seulement sont indépendantes, mais dans le cas général, il est difficile de les fixer. La description de l'orientation d'un solide par les cosinus directeurs est une méthode redondante.

- **Les angles d'Euler** : Dans ce cas, l'orientation d'un repère R_n associé à un solide quelconque, dans un repère référence R_0 , est déterminée par la spécification de 3 angles non redondants correspondants à trois rotations successives autour des axes principaux. Il existe douze systèmes différents d'angle d'Euler, dépendant des axes choisis, par exemple (z, x, z) . La Figure 1.9 illustre cette méthode de description de l'orientation. Le plan (x_n, y_n) coupe le plan (x_0, y_0)

FIGURE 1.9 – Les angles d'Euler (convention z, x, z)

suivant une droite ON appelée ligne modale, perpendiculaire aux axes z_0 et z_n . Son sens positif est donné par le produit vectoriel $z_n \wedge z_0$. Comme le montre la Figure, les angles d'Euler sont définis comme suit :

- ϕ (précession) : angle entre x_0 et ON tel que $0 \leq \phi \leq 360^\circ$,
- θ (nutation) : angle entre z_0 et z_n tel que $0 \leq \theta \leq 180^\circ$,
- ψ (rotation propre) : angle entre ON et x_n tel que $0 \leq \psi \leq 360^\circ$.

Les angles ϕ et ψ sont mesurés dans le sens donné par la règle du *tire-bouchon* respectivement autour des axes z_0 et z_n .

La composition de ces trois rotations permet de calculer la matrice d'orientation. En effet, on a :

$$A_{Eul} = R(z, \phi) \cdot R(x, \theta) \cdot R(z, \psi), \quad (\text{II.1.1.23})$$

d'où

$$A_{Eul} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi & -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \cos \theta \sin \psi & -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi & -\cos \phi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1.1.24})$$

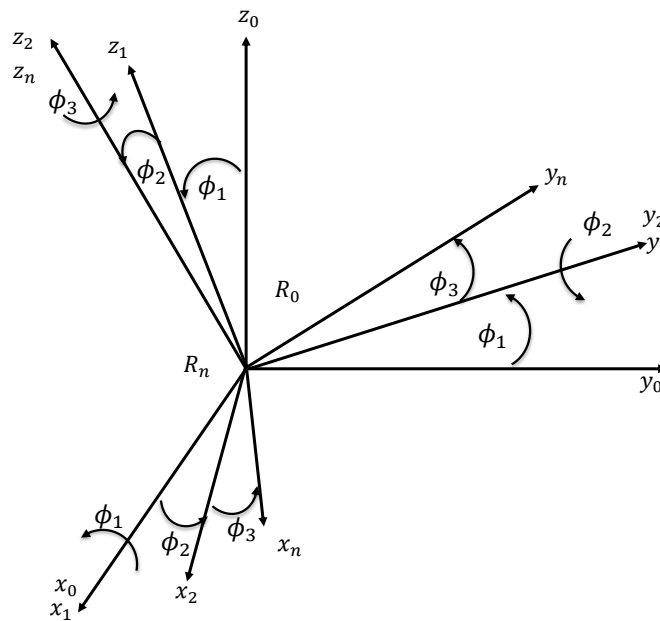
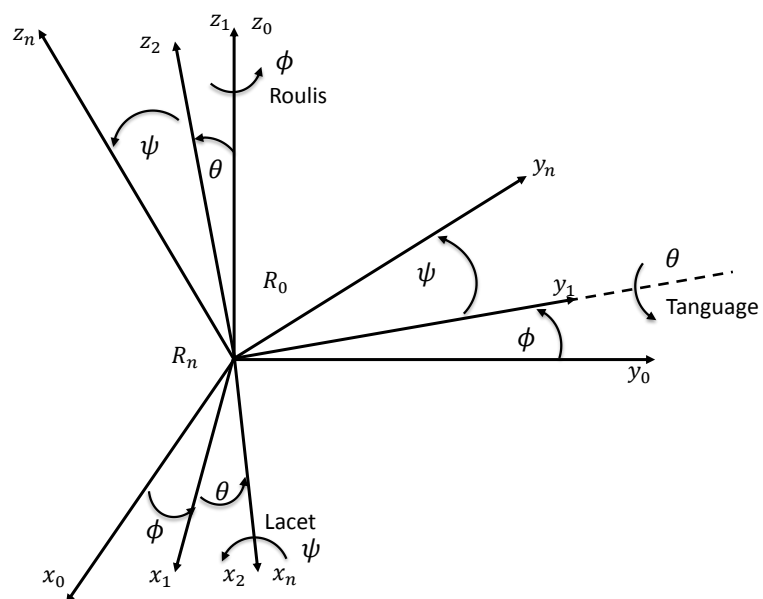
Remarque 1. Au lieu de prendre par convention l'ordre (z, x, z) , certains auteurs [18] prennent l'ordre (z, y, z) , ce qui donne :

$$\begin{aligned} A_{zyz} &= R(z, \phi) \cdot R(y, \theta) \cdot R(z, \psi), \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & -\cos \phi \cos \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi & -\sin \phi \cos \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{II.1.1.25})$$

- **Les angles de Bryant** : Comme pour les angles d'Euler, l'orientation d'un repère R_n , associé à un solide quelconque, dans un repère de référence R_0 , est déterminée par la spécification de 3 angles correspondants à 3 rotations successives (x, y, z) . La Figure 1.16 illustre cette description de l'orientation. La composition de ces trois rotations permet de calculer la matrice d'orientation. En effet, on a :

$$\begin{aligned} A_{Bry} &= R(x, \phi_1) \cdot R(y, \phi_2) \cdot R(z, \phi_3), \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi_2 \cos \phi_3 & \cos \phi_1 \sin \phi_3 + \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos \phi_3 & \sin \phi_1 \sin \phi_3 - \cos \phi_1 \sin \phi_2 \cos \phi_3 \\ -\cos \phi_2 \sin \phi_3 & \cos \phi_1 \cos \phi_3 - \sin \phi_1 \sin \phi_2 \sin \phi_3 & \sin \phi_1 \cos \phi_3 + \cos \phi_1 \sin \phi_2 \sin \phi_3 \\ \sin \phi_2 & -\sin \phi_1 \cos \phi_2 & \cos \phi_1 \cos \phi_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{II.1.1.26})$$

- **les angles Roulis-Tangage-Lacet** : connus aussi sous la notation anglaise **Roll, Pitch, Yaw Angles**. Comme pour les deux représentations précédentes, l'orientation d'un repère R_n , associé à un solide quelconque, dans un repère de référence R_0 , est déterminée par la spécification de 3 angles correspondants à 3 rotations successives (z, y, x) . La Figure 1.11 illustre cette description de l'orientation. La composition de ces trois rotations permet de calculer la matrice d'orientation :

FIGURE 1.10 – Les angles de Bryant (convention x, y, z).FIGURE 1.11 – Les angles de roulis-tangage-lacet (convention z, y, x).

$$\begin{aligned}
A_{RTL} &= R(z, \phi) \cdot R(y, \theta) \cdot R(x, \psi), \\
&= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{II.1.1.27}$$

– Les paramètres d'Euler : Les quaternions

Les quaternions (voir annexe A) permettent eux aussi de décrire l'orientation d'un solide. L'orientation d'un repère R_n , associé à un solide quelconque, dans un repère de référence R_0 , est déterminée par la spécification des 4 paramètres (q_0, q_1, q_2, q_3) qui décrivent une rotation unique $\theta \in [-180; 180]$ autour d'un axe de vecteur unitaire u tel que :

$$\begin{aligned}
q_0 &= \cos \frac{\theta}{2}, \\
q_1 &= u_x \cdot \sin \frac{\theta}{2}, \\
q_2 &= u_y \cdot \sin \frac{\theta}{2}, \\
q_3 &= u_z \cdot \sin \frac{\theta}{2}.
\end{aligned}
\tag{II.1.1.28}$$

Ces paramètres ont les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}
2q_0^2 - 1 &= \cos \theta, \\
q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 &= 1 \quad (\text{c'est-à-dire quaternion unitaire}).
\end{aligned}
\tag{II.1.1.29}$$

La Figure 1.12 illustre cette description de l'orientation. D'après (II.1.1.29), la matrice de rotation (A.8) s'écrit :

$$R = \begin{bmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 \end{bmatrix}.
\tag{II.1.1.30}$$

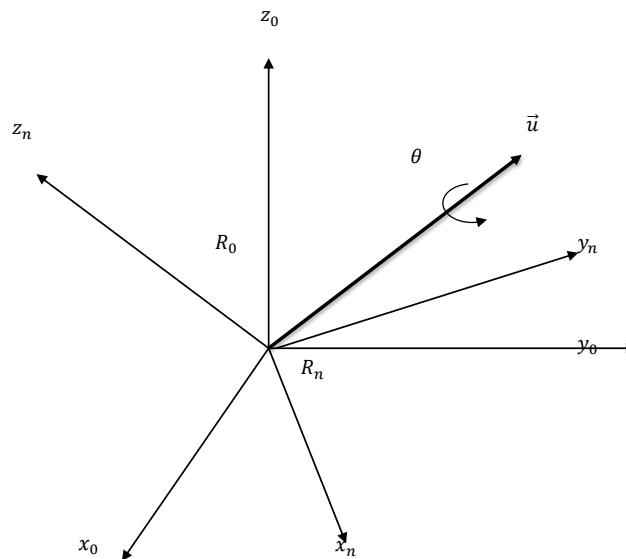


FIGURE 1.12 – Les quaternions

1.2 Modélisation robotique

1.2.1 Modèle géométrique directe et inverse

La conception et la commande des robots manipulateurs nécessitent le calcul de certains modèles mathématiques, tels que :

- Les modèles de transformation entre l'espace opérationnel (dans lequel on définit la situation de l'organe terminal \vec{X}) et l'espace articulaire (dans lequel on définit la configuration du robot \vec{q}).
- Les modèles dynamiques définissant les équations du mouvement du robot, qui permettent d'établir les relations entre les couples et les forces exercés par les actionneurs et les positions, vitesses et accélérations articulaires.

Parmi les modèles de transformation, on distingue :

- les modèles géométriques direct et inverse qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction de la configuration du mécanisme articulaire et inversement : $\vec{X} \longleftrightarrow \vec{q}$.
- les modèles différentiels direct et inverse qui expriment la différentielle de la situation de l'organe terminal en fonction de la configuration du mécanisme articulaire et inversement : $\vec{\dot{X}} \longleftrightarrow \vec{\dot{q}}$.

La modélisation systématique des robots exige une méthode adéquate pour la description géométrique de leur morphologie. La méthode la plus répandue est celle de Denavit-Hartenberg

(DH) [19]. Mais les ambiguïtés qu'elle porte lorsqu'elle est appliquée à des robots de structure fermée ou arborescente nous a conduit à utiliser la notation de DH modifiée par Wisama Khalil et Kleinfinger [20, 21]. Cette méthode permet la description homogène en un nombre minimum de paramètres pour la représentation des différentes structures de robot généralement rencontrées.

1.2.1.1 Paramétrage de Denavit-Hartenberg modifié

1.2.1.1.1 Cas des robots à chaîne ouverte simple [21]

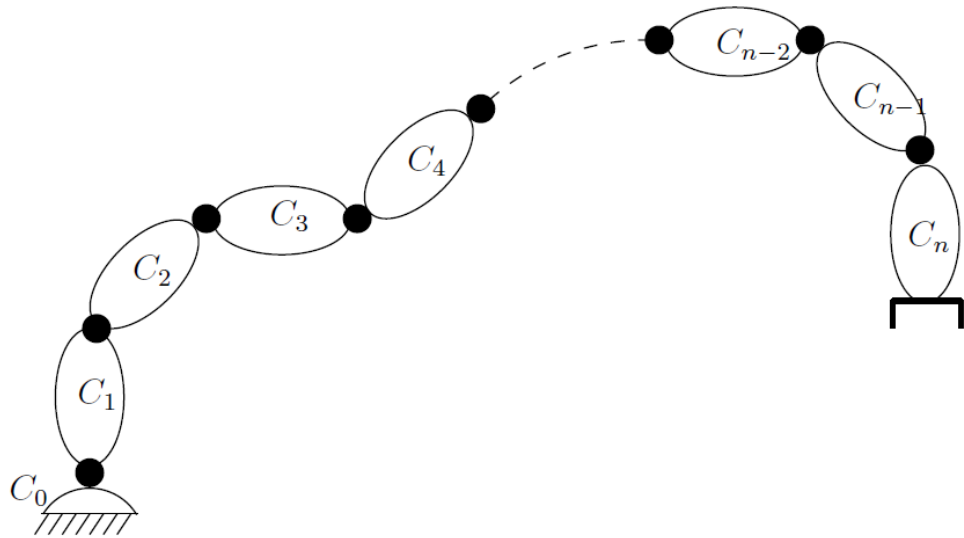


FIGURE 1.13 – Robot à structure ouverte simple

Soit un système mécanique constitué par des corps rigides assemblés entre eux par des liaisons mécaniques simples, appelées articulations, avec un seul degré de liberté par articulation. Elles peuvent être de deux types : rotoïde(pivot) ou prismatique. Afin d'obtenir les modèles géométriques, cinématiques et dynamiques du système, il faut définir les repères attachés à chaque corps. Le système (voir Figure 1.13) est composé de $n + 1$ corps $C_0, C_1, C_2 \dots C_n$ et de n articulations. Le corps C_0 désigne la base du robot. Le corps C_n est celui qui porte l'organe terminal. L'articulation j connecte le corps C_j au corps C_{j-1} . Soit le repère R_j associé au corps C_j . Il est défini par son origine O_j et par une base orthonormée dont les axes notés (x_j, y_j, z_j) sont définis de la manière suivante :

- L'axe z_j est porté par l'axe de l'articulation j ,

- l'axe x_j est porté par la perpendiculaire commune aux axes z_j et z_{j+1} si z_j et z_{j+1} sont parallèles ou colinéaires. Ce choix de x_j n'est pas unique.
- l'axe y_j est pris de telle sorte que le repère (x_j, y_j, z_j) soit orthonormé direct.

Le passage du repère R_{j-1} au repère R_j , s'exprime en fonction des quatre paramètres suivant :

- α_j est l'angle entre les axes z_{j-1} et z_j correspondant à une rotation autour de x_{j-1} .
- d_j est la distance entre les axes z_{j-1} et z_j le long de x_{j-1} .
- θ_j est l'angle entre les axes x_{j-1} et x_j correspondant à une rotation autour de z_j .
- r_j est la distance entre les axes x_{j-1} et x_j correspondant à une rotation autour de z_j .

La Figure 1.14 représente la définition des paramètres de Denavit-Hartenberg modifié. La va-

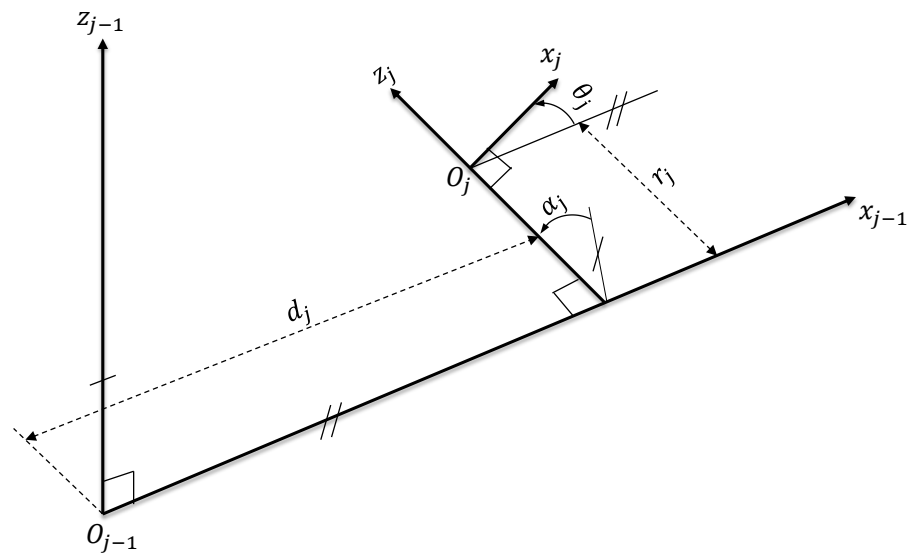


FIGURE 1.14 – Paramètres géométriques : cas d'une structure ouverte simple.

riable articulaire q_j (associée à la j^{me} articulation) est :

$$q_j = \begin{cases} \theta_j, & \text{si l'articulation est de type pivot,} \\ r_j, & \text{si l'articulation est de type prismatique.} \end{cases} \quad (\text{II.1.2.31})$$

La matrice de transformation homogène définissant le repère R_j dans le repère R_{j-1} est donnée par :

$${}^{j-1}T_j = Rot(x, \alpha_j) \cdot Trans(x, d_j) \cdot Rot(z, \theta_j) \cdot Trans(z, r_j), \quad (\text{II.1.2.32})$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j & 0 & d_j \\ \cos \alpha_j \cdot \sin \theta_j & \cos \alpha_j \cdot \cos \theta_j & -\sin \alpha_j & -r_j \cdot \sin \alpha_j \\ \sin \alpha_j \cdot \sin \theta_j & \sin \alpha_j \cdot \cos \theta_j & \cos \alpha_j & r_j \cdot \cos \alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.2.33})$$

On remarque que la matrice de rotation ${}^{j-1}A_j (3 \times 3)$ est définie comme suit :

$${}^{j-1}A_j = Rot(x, \alpha_j) \cdot Rot(z, \theta_j), \quad (\text{II.1.2.34})$$

car les operations de rotations/translations successives sur un même axe sont commutatives.

On en déduit la matrice de transformation homogène inverse permettant le passage du repère R_j au repère R_{j-1} :

$$\begin{aligned} {}^jT_{j-1} &= Trans(z, -r_j) \cdot Rot(z, -\theta_j) \cdot Trans(x, -d_j) \cdot Rot(x, -\alpha_j), \\ &= \begin{bmatrix} & -d_j \cos \theta_j & & \\ & d_j \sin \theta_j & & \\ & -r_j & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_j & \cos \alpha_j \cdot \sin \theta_j & \sin \alpha_j \cdot \sin \theta_j & -d_j \cos \theta_j \\ -\sin \theta_j & \cos \alpha_j \cdot \cos \theta_j & \sin \alpha_j \cdot \cos \theta_j & d_j \sin \theta_j \\ 0 & -\sin \alpha_j & \cos \alpha_j & -r_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{II.1.2.35})$$

Remarques :

1. Pour la définition de R_0 , le choix le plus simple consiste à confondre R_0 avec R_1 pour la valeur particulière de l'articulation $q_1 = 0$. Cela signifie que z_0 et z_1 sont confondus, de plus $O_0 = O_1$ lorsque l'articulation 1 est rotoïde, et x_0 est parallèle à x_1 lorsque l'articulation 1 est prismatique.
2. De même, en définissant l'axe x_n du repère R_n comme étant aligné (colinéaire) à x_{n-1} lorsque $q_n = 0$, on rend les paramètres $r_n = \theta_n = 0$.

3. Pour une articulation j prismatique, l'axe z_j est parallèle à l'axe de l'articulation mais la position de cet axe dans l'espace peut être quelconque.
4. Lorsqu'une cinématique est constituée par 2 ou plusieurs axes parallèles consécutifs, on peut se ramener à une seule matrice de transformation équivalente en faisant intervenir la somme des variables articulaires. Par exemple, si $\alpha_{j+1} = 0$, les axes z_j et z_{j+1} sont parallèles. Dans ce cas, on a :

$${}^{j-1}T_{j+1} = {}^{j-1}T_j \cdot {}^jT_{j+1}, \quad (\text{II.1.2.36})$$

$$= \text{Rot}(x, \alpha_j) \cdot \text{Trans}(x, d_j) \cdot \text{Rot}(z, \theta_j) \cdot \text{Trans}(z, r_j) \cdot \text{Rot}(x, \alpha_{j+1}) \cdot \text{Trans}(x, d_{j+1}) \cdot \text{Rot}(z, \theta_{j+1}) \cdot \text{Trans}(z, r_{j+1}), \quad (\text{II.1.2.37})$$

$$= \begin{bmatrix} C(\theta_j + \theta_{j+1}) & -S(\theta_j + \theta_{j+1}) & 0 & d_j + d_{j+1} \cdot C\theta_j \\ C\alpha_j \cdot S(\theta_j + \theta_{j+1}) & C\alpha_j \cdot C(\theta_j + \theta_{j+1}) & -S\alpha_j & d_{j+1} \cdot C\alpha_j \cdot S\theta_j - (r_j + r_{j+1}) \cdot S\alpha_j \\ S\alpha_j \cdot S(\theta_j + \theta_{j+1}) & S\alpha_j \cdot C(\theta_j + \theta_{j+1}) & C\alpha_j & d_{j+1} \cdot S\alpha_j \cdot S\theta_j + (r_j + r_{j+1}) \cdot C\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.1.2.38})$$

où C désigne la fonction cosinus et S la fonction sinus.

La transformation inverse a pour expression :

$${}^{j+1}T_{j-1} = \begin{bmatrix} & -d_j \cos(\theta_j + \theta_{j+1}) - d_{j+1} \cos \theta_{j+1} \\ {}^{j-1}A_{j+1}^T & d_j \sin(\theta_j + \theta_{j+1}) + d_{j+1} \sin \theta_{j+1} \\ & -(r_j + r_{j+1}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.1.2.39})$$

1.2.1.1.2 Cas des chaînes arborescentes

Une structure (ou chaîne) est constituée par $n + 1$ corps, n articulations et r organes terminaux.

Par convention, les corps et articulations sont numérotés de la manière suivante :

- la base est fixe et constitue le corps C_0 ,
- les numéros des corps et articulations sont croissants sur chaque branche en partant de la base (corps C_0), vers un organe terminal,
- le corps C_j est articulé autour de l'articulation j par rapport au corps $C_{a(j)}$, qui représente le corps antécédent sur la chaîne menant au corps C_j en partant de la base.

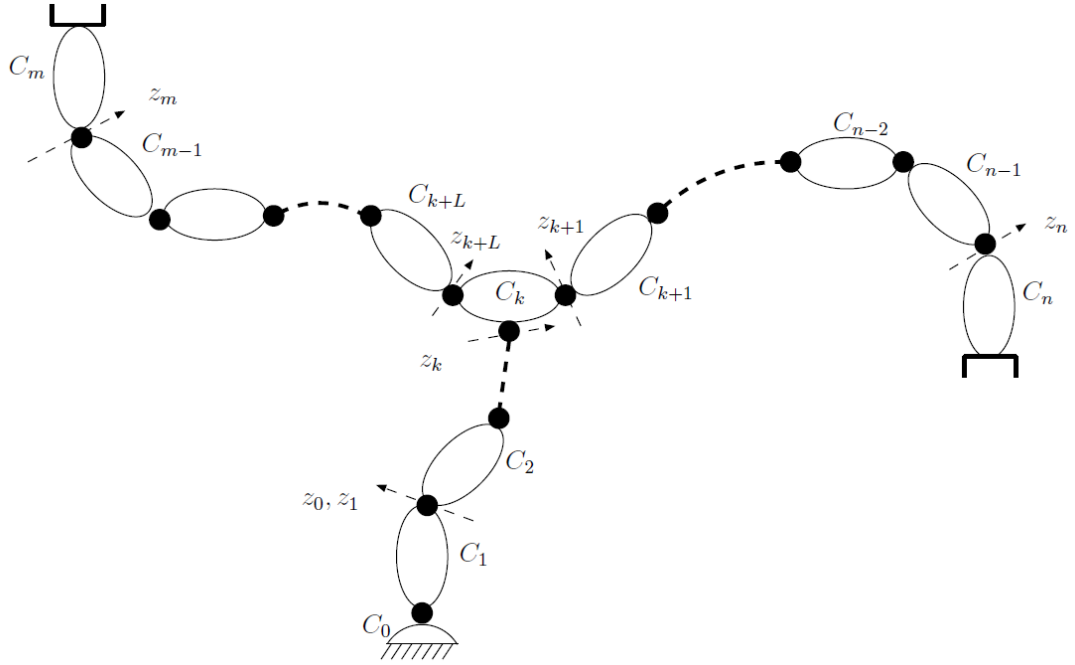


FIGURE 1.15 – Robot à structure ouverte arborescente.

Le corps C_j est le successeur du corps $C_{a(j)}$ et l'antécédent du corps $C_{s(j)}$. La Figure 1.15 représente un exemple de chaîne arborescente avec deux organes terminaux. Le repère R_j est défini de la façon suivante :

- R_j est fixe par rapport au corps C_j .
- L'axe z_j est porté par l'axe de l'articulation j ,
- l'axe y_j est pris de telle sorte que le repère (x_j, y_j, z_j) soit orthonormé direct.
- 1. Si le corps $C_{a(j)}$ n'a pas d'arborescence, l'axe x_i est porté par la perpendiculaire commune aux axes z_i et z_j si z_j et z_{j+1} sont parallèles ou colinéaires. Le choix de x_j n'est pas unique.
- 2. Si le corps C_i porte plus d'un corps, C_j et C_k par exemple, il faut alors choisir l'axe x_i sur l'une des deux perpendiculaires communes à z_i, z_j ou à z_i, z_k . Le bon sens est de retenir la préférence à la chaîne menant à l'organe terminal principal, ou bien à la chaîne qui possède le plus grand nombre de corps articulés. Deux cas doivent être envisagés pour définir un repère lié à C_j successeur de C_i .
 - si l'axe x_i est la perpendiculaire commune à z_i, z_j alors la matrice de passage ${}^i T_j$ (du repère R_i au repère R_j) s'écrit comme dans le cas des chaînes simples à partir des 4 paramètres $(\alpha_j, d_j, \theta_j, r_j)$.
 - Si l'axe x_i est la perpendiculaire commune à z_i, z_k , 2 paramètres supplémentaires doivent être introduit.

- γ_j est l'angle entre l'axe x_i et la perpendiculaire commune aux axes z_i, z_j notées x'_j , autour de l'axe z_i ,
- ϵ_j est la distance entre l'axe x_i et l'axe x'_j , le long de l'axe z_i .

La Figure 1.16 montre les différents repères et paramètres mis en oeuvre pour traiter ce cas particulier. Ces deux paramètres permettent de construire la matrice de passage ${}^i T'_j$, permettant

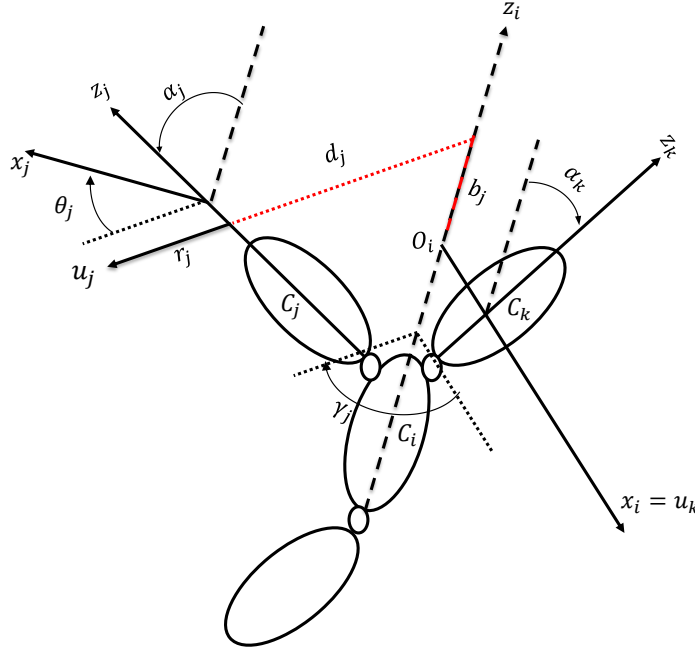


FIGURE 1.16 – Paramètres géométriques standards

le passage du repère R_i au repère R'_j . Le repère R'_j est identique au repère R_i , mais il est construit sur l'autre perpendiculaire commune.

$$\begin{aligned}
 {}^i T'_j &= Rot(z, \gamma_j) \cdot Trans(z, \epsilon_j), \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \gamma_j & -\sin \gamma_j & 0 & 0 \\ \sin \gamma_j & \cos \gamma_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \epsilon_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{II.1.2.40}$$

Alors

$${}^i T_j = {}^i T'_j \cdot {}^i T_j \text{ avec } {}^i T_j = Rot(x, \alpha_j) \cdot Trans(x, d_j) \cdot R \cdot Rot(z, \theta_j) \cdot Trans(z, r_j). \tag{II.1.2.41}$$

Ainsi

$${}^i T_j = \begin{bmatrix} C\gamma_j C\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & -C\gamma_j S\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & S\gamma_j S\alpha_j & d_j C\gamma_j + r_j S\gamma_j S\alpha_j \\ S\gamma_j C\theta_j + C\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & -S\gamma_j S\theta_j + C\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & -C\gamma_j S\alpha_j & d_j S\gamma_j - r_j C\gamma_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j & r_j C\alpha_j + \varepsilon_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{II.1.2.42})$$

Son inverse est :

$${}^j T_i = \begin{bmatrix} C\gamma_j C\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & S\gamma_j C\theta_j + C\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j S\theta_j & -\varepsilon_j S\alpha_j S\theta_j - d_j C\theta_j \\ -C\gamma_j S\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & -S\gamma_j S\theta_j + C\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & -\varepsilon_j S\alpha_j C\theta_j + d_j S\theta_j \\ S\gamma_j S\alpha_j & -C\gamma_j S\alpha_j & C\alpha_j & -r_j - \varepsilon_j C\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.1.2.43})$$

où C désigne le cosinus et S le sinus.

1.2.1.2 Calcul du modèle géométrique direct d'un robot

Définition 1. Le modèle géométrique direct (MGD) est l'ensemble des relations permettant d'exprimer la situation de l'organe terminal du robot en fonction des variables articulaires.

La situation de l'organe terminal est notée par \vec{X} et elle est définie par m coordonnées opérationnelles

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{m-1} & x_m \end{bmatrix}^T. \quad (\text{II.1.2.44})$$

Les variables articulaires sont définies par le vecteur \vec{q} de dimension n :

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_{n-1} & q_n \end{bmatrix}^T. \quad (\text{II.1.2.45})$$

$${}^0 T_n = {}^0 T_1(q_1) \cdot {}^1 T_2(q_2) \cdot {}^2 T_3(q_3) \cdot {}^3 T_4(q_4) \dots {}^{n-1} T_n. \quad (\text{II.1.2.46})$$

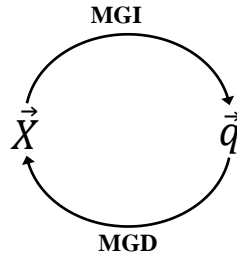
Le modèle géométrique direct du robot peut aussi être représenté par la relation :

$$\vec{X} = f(\vec{q}), \quad (\text{II.1.2.47})$$

où f est une fonction vectorielle statique (la variable temporelle n'intervient pas).

1.2.1.3 Modèle géométrique inverse

Le modèle géométrique direct permet de calculer les coordonnées opérationnelles \vec{X} en fonction des coordonnées articulaires \vec{q} :



Le problème inverse (MGI) permet de connaître les variables articulaires en fonction de la situation de l'organe terminal, ce qui peut être représenté par la relation :

$$\vec{q} = g(\vec{q}), \quad (\text{II.1.2.48})$$

Lorsqu'elle existe, la forme explicite qui donne toutes les solutions possibles au problème inverse constitue ce que l'on appelle le modèle géométrique inverse noté MGI. Il y a rarement une unicité de la solution.

Il n'existe pas une méthode analytique générale pour trouver le MGI, mais un certain nombre de méthodes, plus ou moins adaptées à des classes de cinématiques particulières :

- La méthode de Pieper [22] : permet de résoudre le problème pour un nombre limité d'architectures simples (robots à 6 degrés de liberté (DDLs), possédant 3 articulations rotoïdes d'axes concourants ou 3 articulations prismatiques).
- La méthode de Paul [23] : traite séparément chaque cas particulier et convient à la majorité des robots industriels.
- Les méthodes géométriques [24, 25] consistent à trouver directement chaque variable articulaire à partir de considérations géométriques. Il y a une grande dépendance de ces méthodes avec l'architecture du robot.

Lorsque le modèle géométrique inverse n'existe pas (pas de forme explicite), on utilise des procédures numériques. Par itérations successives, on calcule une solution particulière au problème inverse, qui est une solution locale (dépendant des conditions initiales). Outre cet inconvénient, ces méthodes sont pénalisantes en temps de calcul :

- Les méthodes de type Newton RAPHSON procédant par linéarisation de la matrice de passage du mécanisme [22].
- Les méthodes basées sur le modèle différentiel inverse [25, 26].
- les méthodes basées sur la transposée de la matrice jacobienne [27].

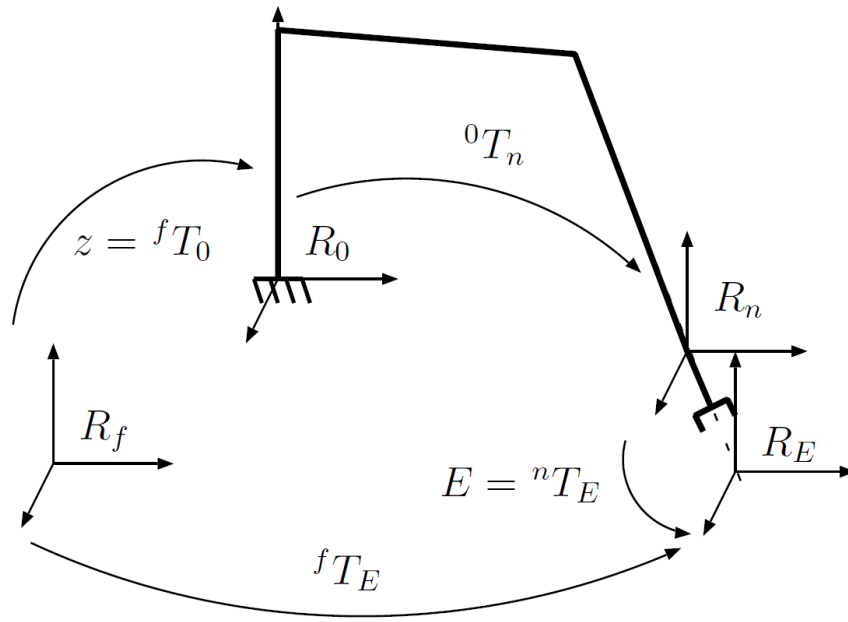
1.2.1.3.1 Position du problème : méthodes de Pieper et Paul [21]

Le robot est un élément parmi d'autres dans une cellule de travail robotique. Il est donc nécessaire de situer dans l'espace de travail à la fois le robot mais également tous ce qui peut être amené à interagir avec ce robot (d'autres robots, homme *etc*). Pour cela, nous définissons un repère atelier que nous noterons R_f , différent dans la plupart des cas du repère R_0 lié à la base fixe du robot (*cf.* Figure 1.17). On adopte les notations suivantes :

- $Z := {}^fT_0$ la matrice de transformation homogène permettant d'exprimer la situation du repère de base du robot R_0 dans le repère atelier R_f .
- 0T_n la matrice de transformation homogène permettant d'exprimer la situation du repère de terminal R_n du robot dans le repère de base R_0 du robot.
- $E = {}^nT_E$, la matrice de transformation homogène permettant d'exprimer la situation du repère outil du robot R_E dans le repère terminal du robot R_n .
- fT_E , la matrice de transformation homogène globale permettant d'exprimer la situation du repère outil du robot R_E dans le repère atelier R_f .

La présence du repère R_E permet de prendre en compte le fait qu'un robot peut avoir plusieurs tâches robotiques à effectuer, et de ce fait plusieurs outils. Ces repères outils sont choisis pour faciliter la description de la tâche robotique associée. Des directions peuvent être privilégiées : comme par exemple un axe d'usinage, un axe de vissage, une orientation pour soudure ou peinture *etc*.

On appelle matrice de passage du robot, la composition des matrices de transformation exprimant le repère du corps terminal R_n dans le repère de base du robot R_0 . Pour une chaîne ouverte

FIGURE 1.17 – Transformation entre le repère de l'organe terminal et R_f .

simple, on a vu que (voir II.1.2.46) :

$${}^0T_n = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \dots {}^{n-1}T_n. \quad (\text{II.1.2.49})$$

La matrice de transformation globale s'écrit alors

$${}^fT_E = Z \cdot {}^0T_n \cdot E. \quad (\text{II.1.2.50})$$

En regroupant à droite les termes connus de (II.1.2.50), on obtient la relation

$$U_0 = {}^0T_n(q), \text{ avec } U_0 = Z^{-1} {}^fT_E E^{-1}. \quad (\text{II.1.2.51})$$

Le problème consiste à trouver les variables articulaires q_1, q_2, \dots, q_n pour que ${}^0T_n(q)$ soit égale à U_0 .

Définition 2. Résolubilité d'un robot manipulateur [22] Un robot manipulateur est dit résolvable lorsqu'il est possible de calculer toutes les configurations permettant d'atteindre une situation donnée.

Tous les robots ne le sont pas, mais ce n'est pas une condition nécessaire pour la commande car dans de pareil cas, des méthodes itératives numériques sont mises en oeuvre pour trouver une

solution locale. D'après [28], les robots à moins de 6 DDLs sont toujours résolubles.

1.2.1.3.2 Existence et nombre de solutions du problème inverse

1. **Absence de solution** : Si la position désirée est en dehors de la zone accessible du robot. En effet la zone accessible est limitée par le nombre de DDL, les débattements articulaires, et la dimension des segments.
2. **Infinité de solutions** : Ce cas se présente lorsque :
 - le robot est redondant vis-à-vis de la tâche à réaliser.
 - le robot se trouve en configuration singulière. Il y a alors une redondance locale qui se traduit par le fait que le robot ne peut déplacer son organe terminal dans certaines directions ou tourner autour de certains axes. De ce fait, il perd un ou plusieurs DDLs. Tout cela est dû aux valeurs numériques particulières prises par les paramètres pour décrire la situation désirée.
3. **Ensemble fini de solutions** : C'est le cas lorsque toutes les solutions peuvent être calculées sans ambiguïté. La forme explicite est alors un ensemble de vecteurs q_1, q_2, \dots, q_r qui satisfont l'équation

$$\vec{X} = f(\vec{q}_i), \quad \forall i = 1, 2, \dots, r, \quad (\text{II.1.2.52})$$

où $r = \sum_{j=1}^n K_j$ représente le nombre de configurations articulaires possibles, et K_j le nombre de solutions pour la variable articulaire q_j .

Le nombre de solutions dépend de l'architecture du robot manipulateur. Il n'existe pas de méthode analytique qui soit systématique pour calculer le MGI. Le mieux est de reprendre les équations du MGD, préalablement calculée et de mener le calcul à l'envers. Le calcul se fait alors au cas par cas.

1.2.1.3.3 Exemple de calcul du modèle géométrique inverse

Considérons un robot manipulateur dont la matrice de passage homogène a pour expression :

$${}^0T_n = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \dots {}^{n-1}T_n. \quad (\text{II.1.2.53})$$

On note

$$U_0 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \dots {}^{n-1}T_n = \begin{pmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1.2.54})$$

Cette matrice U_0 représente la situation de l'organe terminal dans le repère de base du robot R_0 . Résoudre l'équation (II.1.2.54) afin de trouver les variables articulaires en fonction des éléments articulaires s, n, a et P est très difficile. Paul [23], en 1981, a proposé une méthode qui consiste à prémultiplier successivement les 2 membres de l'équation par les matrices de transformation homogène inverse ${}^jT_{j-1}$ pour j variant de 1 à $n - 1$. Cela permet d'isoler et d'identifier l'une après l'autre les variables articulaires que l'on recherche. Pour l'exemple du robot à 6 DDLs on procède comme suit : en multipliant (II.1.2.54) à gauche par 0T_1 on obtient

$${}^1T_0 U_0 = {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6. \quad (\text{II.1.2.55})$$

Les éléments à gauche s'écrivent en fonction de q_1 uniquement. Les éléments à droite s'écrivent en fonction de q_2, q_3, q_4, q_5, q_6 déjà calculé pour le MGD.

q_1 est obtenu par identification d'un ou de deux éléments parmi les plus simples qui constituent l'expression de droite avec les termes équivalents dans celle de gauche.

En partant de l'expression (II.1.2.55), on prémultiplie par 2T_1 et on itère le même processus. La succession des équations permettant le calcul de tous les q_i est comme suit :

$$\begin{aligned} U_0 &= {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6, \\ {}^1T_0 U_0 &= {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 \mapsto q_1, \\ {}^2T_1 U_1 &= {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 \mapsto q_2, \\ {}^3T_2 U_2 &= {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 \mapsto q_3, \\ {}^4T_3 U_3 &= {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 \mapsto q_4, \\ {}^5T_4 U_4 &= {}^5T_6 \mapsto q_5, \text{ et } q_6. \end{aligned} \quad (\text{II.1.2.56})$$

tel que $U_j = {}^{j-1}T_j U_{j-1}$.

Dans certains cas il est possible de résoudre ce système en partant de q_n . Il suffit alors de multiplier à droite les deux membres de l'équation par ${}^jT_{j-1}$ pour j variables de n à 2.

1.2.2 Modélisation cinématique

Les robots sont généralement utilisés pour manipuler des objets dans l'espace, et donc une tâche robotique nécessite la spécification de la position et de l'orientation mutuelle entre l'organe terminal du robot et l'objet. Une fois qu'une base pour le bâti est établie, une base appropriée attachée à l'organe terminal est considérée, dont la position est décrite de façon unique par les coordonnées cartésiennes de l'origine, tandis que son orientation peut être représentée de plusieurs manières.

Une représentation complète de l'orientation est donnée par la matrice de rotation. Ses colonnes sont les vecteurs unitaires de la base attachée à l'organe terminal exprimée dans la base du bâti, ce qui donne neuf paramètres soumis à 6 contraintes d'orthonormalité. D'autre part, les **représentations minimales** [29] de l'orientation sont définies par 3 paramètres qui constituent les angles d'Euler.

La situation d'un corps rigide dans l'espace est généralement décrite par un vecteur position, noté $p \in \mathbb{R}^3$ et par la matrice de rotation $R \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ décrivant l'origine et l'orientation de la base attachée au corps par rapport à la base fixe. La vitesse linéaire du corps est décrite par la dérivé par rapport au temps du vecteur position c'est-à-dire \dot{p} , tandis que sa vitesse angulaire ω peut être définie par la dérivée par rapport au temps de la matrice de rotation (cf. annexe B :

$$\dot{R} = S(\omega)R, \quad (\text{II.1.2.57})$$

où $S(\cdot)$ désigne l'opérateur matriciel antisymétrique.

Une **représentation minimale** de l'orientation peut être obtenue par l'utilisation d'un ensemble de trois angles d'Euler : $\varphi_{euler} = [\phi \ \theta \ \psi]^T$. Parmi les 12 définitions possibles des angles d'Euler, sans perte de généralité, la représentation ZYX est considérée comme conduisant à la matrice de rotation :

$$R(\varphi_{euler}) = R_z(\phi)R_y(\theta)R_x(\psi).$$

La relation entre la dérivée par rapport au temps de l'angle d'Euler $R(\phi_{euler})$, appelée aussi **vitesse rotationnelle**, et la **vitesse angulaire** ω est donné par

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \phi & \cos \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 1 & 0 & -\sin \theta \end{bmatrix} \dot{\phi}_{euler}. \quad (\text{II.1.2.58})$$

1.2.2.1 Mouvement Circulaire

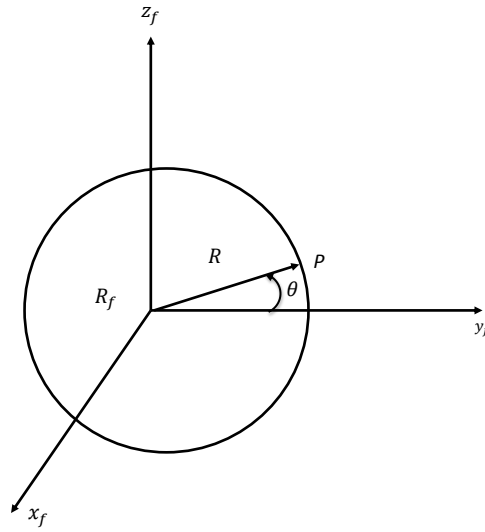


FIGURE 1.18 – Mouvement circulaire.

Soit un point P qui se déplace sur un cercle de rayon r (fig.1.18) :

- s représente la longueur de l'arc AP donc $s = r\theta$,
- θ est l'angle au centre du cercle correspondant.

La vitesse tangentielle v peut s'exprimer en fonction de la vitesse angulaire de rotation ω par la relation suivante :

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = r \omega. \quad (\text{II.1.2.59})$$

1.2.2.2 Système d'axes tournants

Considérons un système d'axes tournants représenté par la Figure 1.19. Soit $R_f(x_z, y_f, z_f)$ un repère absolu d'origine O que nous considérons fixe. Soit $R_m(x_m, y_m, z_m)$ un repère tournant par rapport à R_f de même origine O . Soit A un point variable dans l'espace.

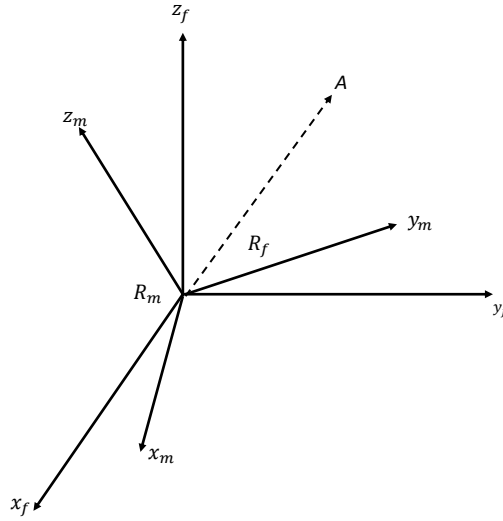


FIGURE 1.19 – Système d’axes tournants.

En se référant au livre d’Agati et al.[30] on a :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{OA} \right]_{R_f} = \left[\frac{d}{dt} \vec{OA} \right]_{R_m} + \omega (R_m/R_f) \wedge \vec{A}, \quad (\text{II.1.2.60})$$

ce qui est équivalent à dire que

$$V(A)_{R_f} = V(A)_{R_m} + \omega (R_m/R_f) \wedge \vec{A}. \quad (\text{II.1.2.61})$$

où ω représente la vitesse angulaire de rotation du repère R_m par rapport au repère R_f .

1.2.2.3 Systèmes d’axes mobiles dans le cas général : lois de composition de vitesses

Soit $R_f(x_f, y_f, z_f)$ un repère absolu d’origine O que nous considérons fixe. Soit $R_m(x_m, y_m, z_m)$ un repère mobile par rapport à R_f d’origine Q . Supposons que R soit le vecteur position de l’origine Q par rapport à O . Supposons que \dot{R} soit la vitesse du point Q par rapport à O . Supposons que $r = \vec{QP}$ soit le vecteur position d’un point P quelconque par rapport à Q . Soit \dot{r} la vitesse du

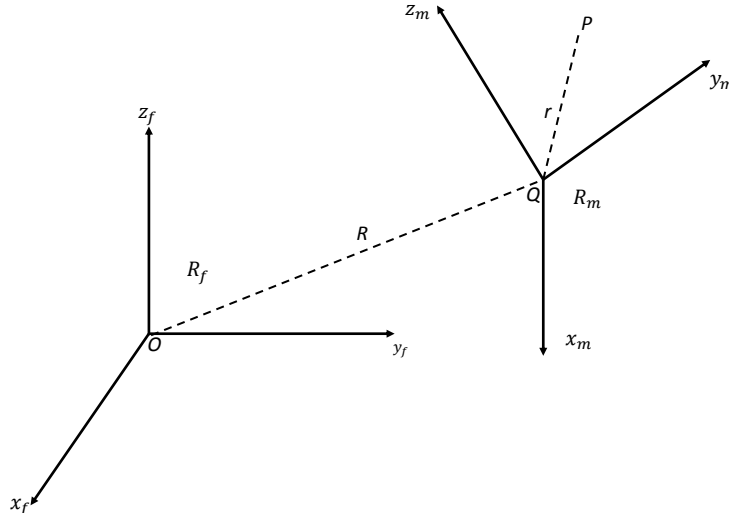


FIGURE 1.20 – Système d'axes mobiles : cas général

point P par rapport à Q . (cf. Figure 1.20). On a alors

$$V(P)_{R_f} = \left[\frac{d}{dt} (\overrightarrow{OP}) \right]_{R_f}, \quad (\text{II.1.2.62})$$

$$= \left[\frac{d}{dt} (\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}) \right]_{R_f}, \quad (\text{II.1.2.63})$$

$$= V(Q)_{R_f} + \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{QP} \right]_{R_f}, \quad (\text{II.1.2.64})$$

$$= V(Q)_{R_f} + V(P)_{R_m} + \omega(R_m/R_f) \wedge r. \quad (\text{II.1.2.65})$$

ceci est obtenu en appliquant la règle de dérivation dans deux repères (II.1.2.60) qui donne

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)_{R_f} = \dot{R} + \left(\frac{dr}{dt} \right)_{R_m} + \omega \wedge r, \quad (\text{II.1.2.66})$$

tel que

- \dot{R} exprime la vitesse du point Q par rapport à O ,
- $\left(\frac{dr}{dt} \right)_{R_m}$ exprime le mouvement dû aux translations,
- $\omega \wedge r$ exprime le mouvement dû aux rotations,
- ω exprime la vitesse angulaire de rotation de R_m par rapport à R_f .

Si on suppose que le point P appartient au repère R_m , alors $V(P)_{R_m} = 0$, ce qui donne

$$V(P \in R_m)_{R_f} = V(Q)_{R_f} + \omega(R_m/R_f) \wedge \overrightarrow{QP}. \quad (\text{II.1.2.67})$$

Définition 3. Torseur cinématique Le torseur cinématique d'un repère R_1 d'origine O_1 par rapport à un repère R_0 d'origine O est défini par le vecteur vitesse de translation (vitesse linéaire) de l'origine de R_1 par rapport à R_0 ainsi que par le vecteur vitesse angulaire de R_1 par rapport à R_0 .

$$\mathfrak{T}(R_1/R_0) = \begin{bmatrix} V(O_1)_{R_0} \\ \omega(R_1/R_0) \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.2.68})$$

1.2.2.4 Modèle cinématique direct

Le Modèle Cinématique Direct (MCD) d'un robot manipulateur décrit la relation entre les vitesses articulaires q_i et la vitesse de l'outil qui peut être exprimée par (cf. [31]) :

- la dérivée des paramètres opérationnels,
- les composantes du torseur cinématique.

1. Calcul indirect de la matrice Jacobienne :

Le calcul indirect de la matrice Jacobienne consiste à utiliser le modèle géométrique direct du robot manipulateur

$$\vec{X} = f(q). \quad (\text{II.1.2.69})$$

Par définition, la matrice Jacobienne est la matrice des dérivées partielles de la fonction f par rapport aux coordonnées généralisées, ainsi

$$J(q) = \frac{\partial f}{\partial q}(q). \quad (\text{II.1.2.70})$$

Cette méthode est pratique pour des robots à architecture simple ayant un nombre réduit de degrés de liberté.

2. Calcul directe de la matrice Jacobienne :

Le calcul directe de la Jacobienne sans recourt à la différentiation du MGD est plus pratique pour le cas général de robots a n DDLs. La matrice Jacobienne obtenue appelée **jacobienne de base**, également connu sous le nom de la **jacobienne cinématique**. Elle relie le torseur cinématique au vecteur des coordonnées articulaires

$$\begin{bmatrix} V \\ \omega \end{bmatrix} = J(q)\dot{q}, \quad (\text{II.1.2.71})$$

où V et ω sont les vecteurs de vitesse linéaire et angulaire de l'organe terminal représenté dans l'espace cartésien.

1.2.2.4.1 Jacobien géométrique

Soit un manipulateur à n DDLs. Le modèle cinématique directe peut s'écrire sous la forme :

$$T_e(q) = \begin{bmatrix} R_e(q) & p_e(q) \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.1.2.72})$$

où $q = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T$ est le vecteurs des variables articulaires.

Le but est d'établir la relation entre les vitesse des articulations et les vitesses linéaires et angulaires de l'organe terminal. En d'autres termes, on doit exprimer la vitesse linéaire de l'organe terminal \dot{p}_e et la vitesse angulaire ω_e en fonction des vitesses articulaires \dot{q} . Les relations recherchées sont toutes les deux linéaires par rapport aux vitesses articulaires :

$$\dot{p}_e = J_p(q)\dot{q}, \quad (\text{II.1.2.73})$$

$$\omega_e = J_o(q)\dot{q}. \quad (\text{II.1.2.74})$$

La matrice reliant les vitesses articulaires à la vitesse linéaire de l'organe terminal est notée J_p , tandis que J_o est celle reliant les vitesses articulaires à la vitesse angulaire de l'organe terminal. En posant

$$J = \begin{bmatrix} J_p \\ J_o \end{bmatrix}, \quad (\text{II.1.2.75})$$

on peut écrire

$$v_e = \begin{bmatrix} \dot{p}_e \\ \omega_e \end{bmatrix} = J(q)\dot{q}. \quad (\text{II.1.2.76})$$

où J est appelé le **Jacobien géométrique**.

1.2.2.4.2 Jacobien analytique

Si la situation de l'organe terminal est spécifiée en termes de représentation minimale (angles d'Euler par exemple), il est tout à fait naturel de se demander si on peut calculer le jacobien

par différentiation du modèle cinématique direct par rapport aux variables articulaires. Ainsi on peut écrire

$$\dot{p}_e = \frac{\partial p_e}{\partial q} \dot{q} = J_p(q) \dot{q}. \quad (\text{II.1.2.77})$$

En ce qui concerne la vitesse de rotation, la représentation minimale de l'orientation en termes de trois variables ϕ_e peut être considérée. Sa dérivée par rapport au temps $\dot{\phi}_e$ diffère généralement de la vitesse angulaire (voir paragraphe 1.2.2). Une fois la fonction $\phi_e(q)$ est connu, il est formellement correct d'écrire :

$$\dot{\phi}_e = \frac{\partial \phi_e}{\partial q} \dot{q} = J_\phi(q) \dot{q}. \quad (\text{II.1.2.78})$$

Ainsi, la dérivée du modèle cinématique direct s'écrit

$$\dot{x}_e = \begin{bmatrix} \dot{p}_e \\ \dot{\phi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_p(q) \\ J_\phi(q) \end{bmatrix} \dot{q} = J_a(q) \dot{q}, \quad (\text{II.1.2.79})$$

où $J_a(q)$ désigne le jacobien analytique qui diffère du jacobien géométrique puisque la vitesse angulaire de l'organe terminale ω_e diffère de $\dot{\phi}_e$.

Remarque 2. *Le calcul de la Jacobienne $J_\phi(q)$ à partir de $\frac{\partial \phi_e}{\partial q}$ n'est pas trivial, car la fonction $\phi_e(q)$ n'est pas généralement disponible sous forme directe, mais nécessite le calcul des éléments de la matrice de rotation.*

1.2.2.5 Modèle cinématique inverse

Le MCD établit la relation fonctionnelle entre les variables articulaires et la position et l'orientation de l'organe terminal. Le Modèle Cinématique Inverse MCI consiste en la détermination des variables articulaires correspondantes à une position et une orientation données de l'organe terminal. La solution de ce problème est d'une importance fondamentale lorsqu'il s'agit de transformer les caractéristiques du mouvement de l'organe terminal, décrites dans l'espace des tâches en leurs correspondants dans l'espace des articulations.

Le problème cinématique inverse est beaucoup plus complexe que le problème direct pour les raisons suivantes :

- Les équations à résoudre sont en général non linéaire, et donc il n'est pas toujours possible de trouver une solution de forme fermée (solution analytique).
- Plusieurs solutions peuvent exister.

- Une infinité de solutions peuvent exister, par exemple, dans le cas d'un manipulateur cinématique redondante.
- Il pourrait y avoir de solutions non admissibles, compte tenu de la structure cinématique du manipulateur.

L'existence de solutions n'est garantie que si la situation donnée de l'organe terminal appartient à l'espace de travail dextre (dexterous workspace¹) du manipulateur.

D'autre part, le problème de solutions multiples ne dépend pas seulement du nombre de degrés de liberté, mais aussi du nombre de paramètres de DH non nuls. En général, plus il y a de paramètres non nuls, plus il y a de solutions admissibles.

Si la matrice jacobienne est inversible, on peut facilement calculer le MCI :

$$\dot{q} = J^{-1} \dot{X}. \quad (\text{II.1.2.80})$$

Il est bien connu que, quand le robot est non redondant, les singularités sont déterminées en résolvant $\det(J) = 0$. Dans le cas redondant, elles sont données par $\det(JJ^T) = 0$. Lors d'une configuration singulière, il n'est pas possible de calculer J^{-1} . On utilise généralement le pseudo inverse défini $J^+ = (J^T J)^{-1} J^T$.

1.2.2.5.1 Singularité

Il existe deux types de singularités :

- Les singularités aux limites de l'espace de travail qui apparaissent lorsque le bras est complètement tendu. Ces singularités ne représentent pas un vrai inconvénient, car ils peuvent être évitées à condition que le manipulateur n'est pas entraînée aux limites de son espace d'atteignabilité.
- Les singularités à l'intérieur de l'espace d'atteignabilité qui apparaissent pour certaines configurations du robot. Elles sont généralement causées par un alignement des axes du robots dans l'espace. Par exemple, si 2 axes sont alignés dans l'espace, la rotation de l'un peut être annulé par la rotation inverse de l'autre, laissant la position de l'articulation indéterminée. En outre, certains alignements cinématiques spécifiques à chaque manipulateur peuvent causer ces singularités.

1. l'ensemble des points atteignables par l'organe terminal avec toutes les orientations possibles

Il est important de souligner que l'inversion de la Jacobienne peut représenter un inconvénient sérieux non seulement au niveau de la singularité, mais aussi au voisinage de celle-ci. Par exemple, pour inverser le jacobien, on a besoin du calcul du déterminant au voisinage d'une singularité. Le déterminant prend alors une valeur relativement faible (des faibles vitesses dans l'espace des tâches peuvent causer des grandes vitesses articulaires).

La gestion des singularités est impérative afin de prévenir des mouvements erratiques du robot. Une façon simple mais pas optimale pour les gérer est la suivante :

- Pour les singularités en limite de l'espace de travail, on peut imposer des butées logicielles afin d'éviter d'arriver dans des configurations "bras tendu".
- Pour les singularités à l'intérieur de l'espace de travail, si on se rapproche d'une configuration singulière q , on calcule $J(q + \Delta q)$ au lieu de $J(q)$, avec Δq assez grand pour pouvoir calculer le pseudo-inverse.
- Une solution pour surmonter le problème de cinématique inverse au voisinage d'une singularité est assuré par ce qu'on appelle les *moindres carrés amortis*.

1.2.3 Modélisation dynamique

La modélisation dynamique consiste en la relation entre les couples (et/ou forces) appliqués aux actionneurs et les positions, vitesses et accélérations des articulations. Le modèle dynamique est représenté par une relation de la forme :

$$\tau = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, f_e), \quad (\text{II.1.2.81})$$

avec

- τ : le vecteur des couples/forces des actionneurs, selon que l'articulation est rotoïde (pivot) ou prismatique,
- q : le vecteur des coordonnées articulaires,
- \dot{q} : le vecteur des vitesses articulaires,
- \ddot{q} : le vecteur des accélérations articulaires.
- f_e : le vecteur représentant les forces et les moments extérieures que le robot exerce sur l'environnement.

Il est courant d'appeler la relation (II.1.2.81) le modèle dynamique inverse, ou tout simplement le modèle dynamique.

Le modèle dynamique directe exprime les accélérations articulaires \ddot{q} en termes de positions q , vitesses \dot{q} et des couples τ . Par conséquent, il est représenté par la relation :

$$\ddot{q} = g(q, \dot{q}, \tau, f_e). \quad (\text{II.1.2.82})$$

Deux grandes approches existent pour calculer les équations dynamiques d'un robot. Celle de Newton-Euler [32–34], qui décrit le comportement dynamique d'un système en termes de forces et moments, et celle de Lagrange [26, 35, 36] qui le décrit en termes de travail et d'énergie.

1.2.3.1 Formulation de Newton-Euler

La position d'un objet parfaitement rigide est représentée par la position de son centre d'inertie et son orientation dans l'espace. Ses moments autour des différents axes sont représentés par sa matrice d'inertie \mathcal{I} . Le mouvement d'une masse ponctuelle m est caractérisé par la deuxième loi de Newton :

$$\vec{F} = m \vec{\gamma}, \quad (\text{II.1.2.83})$$

où \vec{F} est la somme des forces externes appliquées sur cette masse, et $\vec{\gamma}$ son accélération. La rotation d'un objet rigide est caractérisée par l'équation différentielle suivante, appelé equation d'Euler :

$$\vec{N} = \mathcal{I} \vec{\dot{W}} + \vec{W} \wedge (\mathcal{I} \cdot \vec{W}), \quad (\text{II.1.2.84})$$

où \vec{N} est la somme des moments appliqués sur l'objet par rapport à son centre d'inertie G , \mathcal{I} sa matrice d'inertie calculée dans un repère centré en G , et \vec{W} la vitesse de rotation de l'objet autour de son centre d'inertie.

Les équations de Newton-Euler font appel aux lois fondamentales de la dynamique des solides (II.1.2.83) et (II.1.2.84). Elles conduisent à écrire :

$$F_i = m_i \dot{V}_i \quad (\text{Deuxième loi de Newton}), \quad (\text{II.1.2.85})$$

$$N_i = \mathcal{I}_i \dot{W}_i + W_i \wedge (\mathcal{I}_i \cdot W_i), \quad (\text{II.1.2.86})$$

où F_i est le résultat des forces appliquées sur le corps C_i de la chaîne cinématique du manipulateur, m_i est la masse de ce corps, V_i est la vitesse du centre d'inertie de ce corps par rapport au repère absolu fixe, N_i est la résultante des couples appliqués sur le corps par rapport à son centre

d'inertie, W_i est la vitesse de rotation de C_i par rapport au centre d'inertie et \mathcal{I}_i est sa matrice d'inertie calculée dans un repère dont l'origine est le centre d'inertie de C_i .

1.2.3.2 Formulation de Lagrange

Considérons un robot manipulateur a n DDLs. L'énergie totale du robot manipulateur est la somme de l'énergie cinétique \mathcal{K} et l'énergie potentielle \mathcal{U} :

$$\mathcal{E}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) + \mathcal{U}(q), \quad (\text{II.1.2.87})$$

tel que $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$.

Le *Lagrangien* $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ du robot manipulateur a n degrés de libertés est la difference entre son énergie cinétique et son énergie potentielle :

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{U}(q). \quad (\text{II.1.2.88})$$

Nous pouvons donc encore écrire les équations du mouvement

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{K}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{K}(q, \dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{U}(q, \dot{q})}{\partial q} = \tau. \quad (\text{II.1.2.89})$$

Si \mathcal{U} est due uniquement à des forces conservatrices telles que l'énergie gravitationnelle et l'énergie stockée dans des ressorts comprimés alors l'équation de Lagrange (II.1.2.89) s'écrit

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{K}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{K}(q, \dot{q})}{\partial q} = \tau, \quad (\text{II.1.2.90})$$

ou sous la forme équivalente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{K}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{K}(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{II.1.2.91})$$

où τ_i correspond aux

- forces et couples externes, délivrés par les actionneurs, à chaque articulation,
- autres forces non conservatives *e.g.* force due au frottement, à la résistance au mouvement d'un solide dans un fluide et en général, toute les forces qui dépendent du temps et de la vitesse, et pas seulement de la position.

1.2.3.3 Forme Générale du modèle dynamique

Considérons un robot manipulateur rigide à n DDLs reliés entre eux par des articulations sans frottement. La fonction de l'énergie cinétique $\mathcal{K}(q, \dot{q})$ associée à un tel mécanisme articulé peut toujours être exprimée comme suit :

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}, \quad (\text{II.1.2.92})$$

où $M(q)$ est une matrice de dimension $n \times n$, appelée matrice d'inertie, symétrique définie positive $\forall q \in \mathbb{R}^n$. L'énergie potentielle $\mathcal{U}(q)$ ne possède pas de forme particulière comme pour l'énergie cinétique, mais il est connu qu'elle dépend du vecteur de position articulaire q .

Le Lagrangien $\mathcal{L}(q, \dot{q})$, décrit dans (II.1.2.88), s'écrit dans ce cas

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - \mathcal{U}(q). \quad (\text{II.1.2.93})$$

Ainsi l'équation du mouvement (II.1.2.89) peut s'écrire

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] + \frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial q} = \tau. \quad (\text{II.1.2.94})$$

D'autre part, il s'avère que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] = M(q) \dot{q}, \quad (\text{II.1.2.95})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] \right) = M(q) \ddot{q} + \dot{M}(q) \dot{q}. \quad (\text{II.1.2.96})$$

Compte tenu de ces expressions, l'équation du mouvement prend la forme :

$$M(q) \ddot{q} + \dot{M}(q) \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} [\dot{q}^T M(q) \dot{q}] + \frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial q} = \tau, \quad (\text{II.1.2.97})$$

ou sous la forme compacte :

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = \tau, \quad (\text{II.1.2.98})$$

tel que

$$C(q, \dot{q}) \dot{q} = \text{dot} M(q) \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} [\dot{q}^T M(q) \dot{q}], \quad (\text{II.1.2.99})$$

$$g(q) = \frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial q}. \quad (\text{II.1.2.100})$$

Notons que l'équation (II.1.2.98) est l'équation dynamique d'un robot à n DDLs. $C(q, \dot{q}) \dot{q} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur contenant les forces centrifuges et de Coriolis, $g(q) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de forces dues à la gravité et $\tau \in \mathbb{R}^n$ correspond au vecteur des couples appliqués aux DDLs.

1.2.3.4 Propriétés du modèle dynamique

En dépit de la complexité de l'équation dynamique (II.1.2.98), qui décrit le comportement des robots manipulateurs, cette équation et les termes qui la constituent ont des propriétés intéressantes. En outre, de telles propriétés sont d'une importance particulière dans l'étude des systèmes de contrôle pour les robots manipulateurs [37]

1.2.3.4.1 Matrice d'inertie

La matrice d'inertie $M(q)$ joue un rôle important aussi bien dans la modélisation dynamique du robot ainsi que dans la conception du contrôle. La matrice d'inertie $M(q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dépendante seulement de q est une matrice symétrique définie positive qui vérifie les propriétés suivantes :

Propriété 1.2.1. *Il existe un nombre positif α tel que*

$$M(q) \geq \alpha \mathbb{I} \quad \forall q \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{II.1.2.101})$$

où \mathbb{I} désigne la matrice identité de dimension $n \times n$. La matrice $M(q)^{-1}$ existe et elle est définie positive

Propriété 1.2.2. *Pour les robots ayant seulement des articulations pivot, il existe une constante β tel que*

$$\lambda_{\text{Max}} \{M(q)\} \leq \beta \quad \forall q \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{II.1.2.102})$$

Une manière pour choisir β est comme suit

$$\beta \geq n \left(\max_{i,j,q} |M_{ij}(q)| \right), \quad (\text{II.1.2.103})$$

tel que $M_{ij}(q)$ représentent les éléments de la matrice $M(q)$.

Propriété 1.2.3. Pour les robots ayant seulement des articulations pivot, il existe une constante $K_m > 0$ tel que

$$\|M(x)z - M(y)z\| \leq K_m \|x - y\| \|z\|, \quad (\text{II.1.2.104})$$

pour tous vecteurs $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Une manière simple pour déterminer K_m est comme suit

$$K_m \geq n^2 \left(\max_{i,j,q} \left| \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} \right| \right). \quad (\text{II.1.2.105})$$

Propriété 1.2.4. Pour les robots ayant seulement des articulations pivot, il existe une constante $K'_m > 0$ tel que

$$\|M(x)y\| \leq K'_m \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad (\text{II.1.2.106})$$

Une conséquence logique des propriétés ci-dessus et, en particulier, du fait que $M(q)$ est définie positive, c'est que la fonction $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$V(q, \dot{q}) = \dot{q}^T M(q) \dot{q},$$

est définie positive en \dot{q} .

1.2.3.4.2 Matrice des Forces Centrifuges et de Coriolis

La matrice des forces Centrifuges et de Coriolis $C(q, \dot{q})$ dépendant seulement de q et \dot{q} , est de dimension $n \times n$. Les propriétés principales de $C(q, \dot{q})$ sont :

Propriété 1.2.5. Pour un robot manipulateur, la matrice $C(q, \dot{q})$ n'est pas unique cependant le vecteur $C(q, \dot{q}) \dot{q}$ est unique.

Propriété 1.2.6. $C(q, 0) = 0$ pour tous vecteurs $q \in \mathbb{R}^n$.

Propriété 1.2.7. Pour tous vecteurs $q, x, y, z \in \mathbb{R}^n$ et tout scalaire α on a

$$C(q, x)y = C(q, y)x, \quad (\text{II.1.2.107})$$

$$C(q, z + \alpha x)y = C(q, z)y + \alpha C(q, x)y. \quad (\text{II.1.2.108})$$

Propriété 1.2.8. Le vecteur $C(q, x)y$ peut s'écrire sous la forme

$$C(q, x)y = \begin{bmatrix} x^T C_1(q)y \\ x^T C_2(q)y \\ \vdots \\ x^T C_n(q)y \end{bmatrix}, \quad (\text{II.1.2.109})$$

tels que $C_k(q), k = 1, 2, \dots, n$ sont des matrices de dimension $(n \times n)$.

Propriété 1.2.9. Pour les robots ayant seulement des articulations pivot, il existe un nombre $K_{C_1} > 0$ tel que

$$\|C(q, x)y\| \leq K_{C_1} \|x\| \|y\|, \quad \forall q, x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{II.1.2.110})$$

Propriété 1.2.10. Pour les robots ayant seulement des articulations pivot, il existe des nombres $K_{C_1} > 0$ et $K_{C_2} > 0$ tel que

$$\|C(x, z)w - C(y, v)w\| \leq K_{C_1} \|z - v\| \|w\| + K_{C_2} \|x - y\| \|w\| \|z\|, \quad (\text{II.1.2.111})$$

pour tous vecteurs $v, x, y, z, w \in \mathbb{R}^n$.

Propriété 1.2.11. La matrice $C(q, \dot{q})$ est reliée à la matrice d'inertie $M(q)$ par

$$x^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] x = 0, \quad \forall q, \dot{q}, x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{II.1.2.112})$$

ce qui permet de voir que $\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q})$ est antisymétrique. De manière équivalente, la matrice $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ est antisymétrique, ce qui permet d'écrire

$$\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q})^T.$$

Indépendamment de la manière dont est obtenue la matrice $C(q, \dot{q})$, elle satisfait toujours

$$\dot{q}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q} = 0, \quad \forall q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{II.1.2.113})$$

1.2.3.4.3 Le vecteur de forces gravitationnelles

Le vecteur de forces gravitationnelles $g(q)$, ayant comme dimension $n \times 1$ et dépendant seulement de q , vérifie les propriétés suivantes :

Propriété 1.2.12. *Le vecteur $g(q)$ et la vitesse \dot{q} sont corrélés par*

$$\int_0^T g(q(t))^T \dot{q}(t) dt = \mathcal{U}(q(T)) - \mathcal{U}(q(0)), \quad \forall T \in \mathbb{R}_+. \quad (\text{II.1.2.114})$$

Propriété 1.2.13. *Pour les robots ayant seulement des articulations pivot, il existe des nombres k_u tel que*

$$\int_0^T g(q(t))^T \dot{q}(t) + \mathcal{U}(q(0)) \geq k_u, \quad \forall T \in \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad k_u = \min_q \{\mathcal{U}(q)\}. \quad (\text{II.1.2.115})$$

Propriété 1.2.14. *Pour les robots ayant seulement des articulations pivot, le vecteur $g(q)$ le vecteur est lipschitzien, c'est-à-dire il existe une constante $k_g > 0$ tel que*

$$\|g(x) - g(y)\| \leq k_g \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{II.1.2.116})$$

Un moyen simple pour calculer k_g est par l'évaluation de sa dérivée partielle

$$k_g \geq n \left(\max_{i,j,q} \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right| \right). \quad (\text{II.1.2.117})$$

De plus k_g satisfait

$$k_g \geq \left\| \frac{\partial g(q)}{\partial q} \right\| \geq \lambda_{\max} \left\{ \frac{\partial g(q)}{\partial q} \right\}. \quad (\text{II.1.2.118})$$

Propriété 1.2.15. *Pour les robots ayant seulement des articulations pivot, il existe une constante k' tel que*

$$\|g(q)\| \leq k', \quad \forall q \in \mathbb{R}^n.$$

Chapitre 2

Étude documentée sur la co-manipulation robotique

Sommaire

3.1 Modélisation du Penducobot par application du Principe Fondamental de la Dynamique	72
3.1.1 Notations & nomenclature	72
3.1.2 Bilan des actions mécaniques extérieures	73
3.1.2.1 Inventaire des actions mécaniques extérieures au bras B	73
3.1.2.2 Inventaire des actions mécaniques extérieures à la charge pendulaire S_2	78
3.1.3 Application du principe fondamentale de la dynamique	80
3.1.3.1 A la charge S_2	80
3.1.3.2 A la barre porteuse B	84
3.1.4 Résumé	88
3.2 Modélisation du robot à deux bras sans charge pendulaire par application du Principe Fondamental de la Dynamique	89
3.2.1 Notations & nomenclature	89
3.2.2 Bilan des actions mécaniques extérieures	89
3.2.2.1 Bilan des actions mécaniques appliqués à la charge M	90
3.2.2.2 Bilan des actions mécaniques appliquées à la Barre 2	91
3.2.2.3 Bilan des actions mécaniques appliquées sur la Barre 1	94
3.2.3 Principe Fondamentale de la dynamique :	96

3.2.3.1	Principe Fondamentale de la dynamique appliqué à la masse M	96
3.2.3.1.1	Théorème de la résultante dynamique	96
3.2.3.2	Principe fondamentale de la dynamique appliqué à la barre 2	97
3.2.3.2.1	Théorème de la résultante dynamique	99
3.2.3.2.2	Théorème du moment dynamique	101
3.2.3.3	Principe Fondamentale de la dynamique sur la barre 1 . . .	101
3.2.3.3.1	Théorème de la résultante dynamique	103
3.2.3.3.2	Théorème du moment dynamique	103
3.2.4	Modélisation	104
3.2.5	Résumé	105

Au travers d'un bref parcours des travaux antérieurs, nous allons explorer plus en détail les différentes modalités d'interaction et fonctions envisageables de la comanipulation.

2.1 Co-manipulation

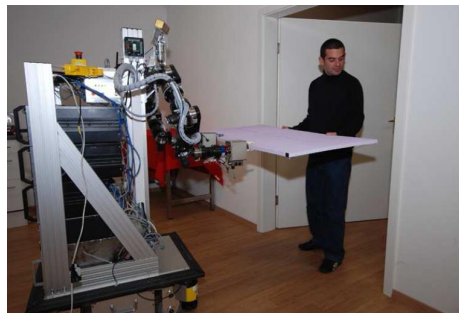


FIGURE 2.1 – Un homme et un robot en collaboration pour transporter un objet volumineux dans un environnement contraint (à gauche) et démonstration de la façon dont un être humain peut interagir physiquement avec un manipulateur, pour enlever la portière d'une voiture : réalisation de la tâche de désassemblage (à droite) .

La *co-manipulation* robotique connue aussi sous le nom de la *cobotique* se définit par le fait qu'un opérateur humain et un robot interagissent sans barrière afin de manipuler conjointement un outil (ou un objet) dans le même espace de travail. Le but principal est de réduire la fatigue, accroître la précision des mouvements, amplifier la puissance et améliorer la vie quotidienne. Des différents systèmes robotiques avec diverses caractéristiques et capacités sont présentés

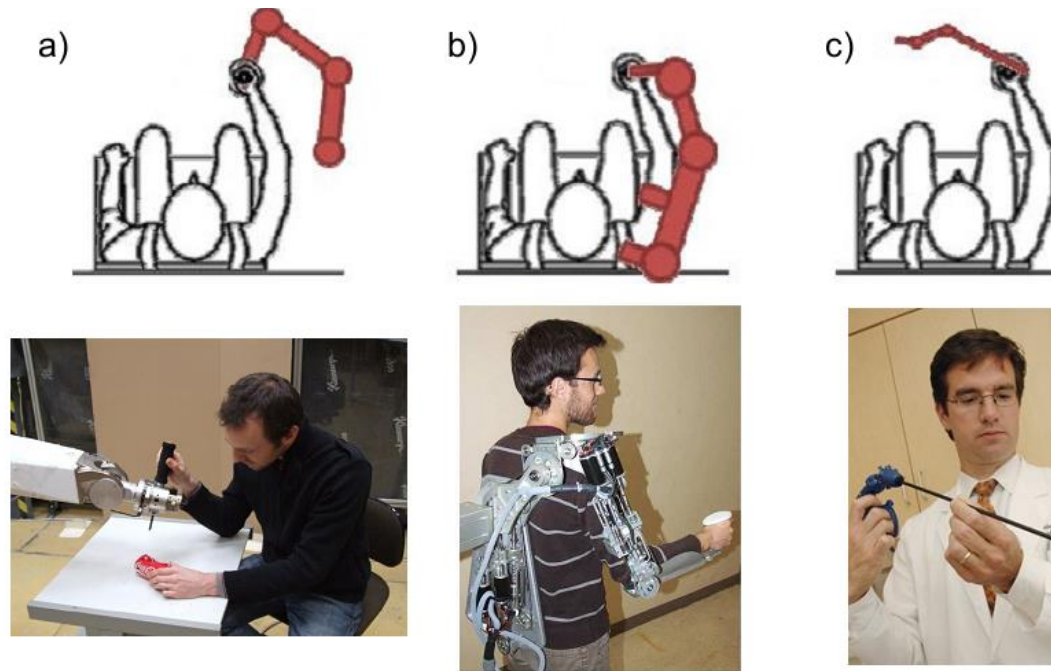


FIGURE 2.2 – Les 3 catégories de comanipulation : a) parallèle, b) orthétique et c) sérielle.

pour servir cet objectif. Parmi ces systèmes, on note ceux servant pour accomplir des tâches de manutention comme dans les travaux de Akella et al. et Colgate et al.[9, 11]. Ce sont des systèmes robotisés qui manipulent des objets en collaboration avec un opérateur humain. Ce dernier exprime sa volonté généralement par un mouvement désiré et le robot doit effectuer la tâche en fournissant les efforts nécessaires et/ou en adaptant son impédance. Ces robots sont rencontrés par exemple dans le secteur de l'industrie automobile comme décrit dans [5, 6] (cf. Figure 2.1). Lawitzky et al. dans [10] (cf. Figure 2.1) proposent une politique systématique de partage d'effort entre un robot à trois degrés de liberté et un opérateur pour la manutention d'une table massive dans un environnement géographiquement contraint. Une autre illustration particulièrement populaire de la comanipulation est sans doute l'exosquelette dont une des premières architectures fut proposée dans [38] sous la dénomination de « *human extender* » et popularisé ensuite par le BLEEX [39] voir Figure 2.3.

Selon la nature du contact entre le robot et l'opérateur, on distinguera trois catégories de comanipulation : parallèle, orthétique et sérielle [40].

- (a) **La co-manipulation parallèle :** Dans le cas de la co-manipulation parallèle, le robot, l'opérateur et l'outil forment des chaînes parallèles sur le graphe des liaisons. Les efforts du robot et de l'opérateur s'ajoutent donc pour former l'effort final appliqué sur l'outil. L'ensemble des efforts entre l'opérateur et le robot sont transmis au niveau de la main et de l'organe

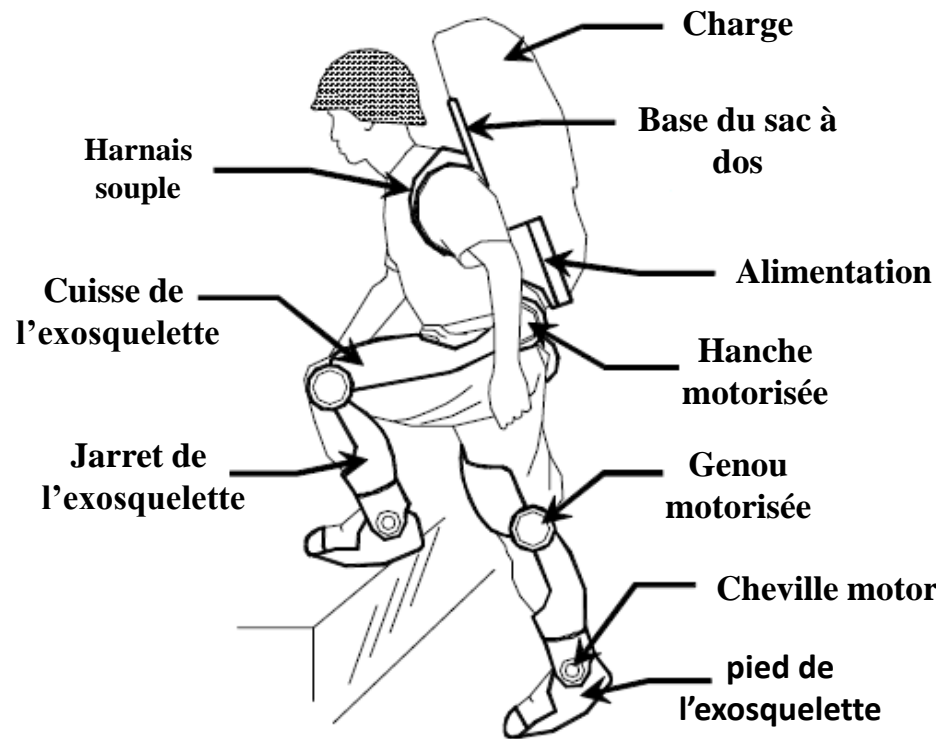


FIGURE 2.3 – Exosquelette de membres inférieurs de l'université de Berkeley BLEEX (Berkeley Lower Extremity Exoskeleton).

terminal du robot (*cf.* Figure 2.2a). C'est sur ce type de co-manipulation que notre thèse se concentre puisqu'elle s'applique aux robots industriels.

- (b) **La co-manipulation orthétique :** Il est possible d'envisager que les efforts soient répartis en plusieurs points de contact sur le membre de l'opérateur (*cf.* Figure 2.2b). Ces robots sont communément appelés exosquelettes ou orthèses. Ils ont une architecture qui épouse au mieux celle de l'opérateur. Depuis la dernière décennie, ils font l'objet de beaucoup de recherches dans le monde entier.
- (c) **La co-manipulation sérielle :** La co-manipulation sérielle se caractérise par le fait que l'opérateur, le robot et l'outil forment une chaîne cinématique série. Ainsi le déplacement final de l'outil résulte de la composition du mouvement de l'opérateur avec celui du robot. Ce type d'assistance se présente nécessairement sous forme d'un appareil portatif. Un exemple simple de co-manipulation sérielle est l'utilisation d'un tournevis électrique.

2.2 État de l'art

Une étude approfondie des travaux existants dans la littérature scientifique nous a permis de distinguer plusieurs techniques (fonctionnalités) envisagées pour résoudre les différents tâches de co-manipulation.

2.2.1 Compensation du poids de la charge

La compensation du poids de la charge est une fonctionnalité apparue dans l'industrie pour la première fois grâce au "balancer" de [41]. L'idée était alors d'utiliser un enrouleur (poulie) pneumatique suspendu, pour appliquer un effort constant vers le haut sur la charge soulevée par l'intermédiaire d'un câble. La rotation de la poulie enroule ou déroule la corde et permet alors à l'organe terminal de soulever ou descendre la charge. L'effort de compensation étant alors réglé manuellement en fixant la pression dans l'enrouleur, il est indépendant de la hauteur de l'outil. Ce système a été repris par [42] qui l'a adapté à un moteur électrique et a introduit un capteur d'effort pour régler la compensation du poids automatiquement, le capteur d'effort étant placé sur l'enrouleur, ce qui permet à l'opérateur de faire monter ou descendre la charge intuitivement en appliquant de petits efforts directement dessus. Ces deux types de systèmes ne sont pas adaptés aux cas de charges à poids variables. La résolution de ce problème a été abordée par le professeur Kazerooni, de l'université de Berkeley aux États-Unis [43] (cf. Figure 2.4). L'opérateur ne manipule pas la charge directement. L'organe terminal sert d'interface entre l'opérateur humain et l'objet qui doit être levée. Cet organe terminal est suspendu par l'intermédiaire d'une corde et une poulie. Le capteur d'effort est positionné directement au niveau de la poignée de l'opérateur, ce qui permet de rendre le système plus sensible encore, et évite la procédure de tarage pour chaque nouvel objet transporté.

La grue de levage Easy Arm fabriquée par Gorbil (2.5), offre une combinaison de ces techniques.

Il est cependant important de remarquer que tous les systèmes à câble imposent que la fixation du câble soit alignée avec le centre de gravité de l'objet à manipuler. Dans la plupart des cas, le câble ne pourra être fixé qu'au-dessus du centre de gravité de l'objet. Cela empêche de déplacer sans effort la charge selon ses axes de roulis et de tangage : les moments du poids ne sont pas compensés. Seuls des mécanismes rigides comme les bras manipulateurs industriels permettent

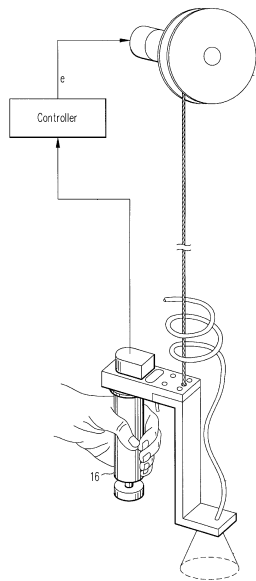


FIGURE 2.4 – Amplificateur de puissance de Kazerooni



FIGURE 2.5 – Grue de levage Easy Arm du fabricant Gorbél, permettant une co-manipulation avec compensation active du poids de la charge.

de manipuler librement l'objet selon toutes ses orientations, indépendamment de la position du centre de gravité par rapport au point de fixation.

2.2.2 Programmation par démonstration (Lead-through programming)

La technique *lead-through programming*, appelé aussi *programmation par démonstration* [44], permet aussi de simplifier la tâche de co-manipulation. L'idée est simple, programmer une tâche sur le robot, en déplaçant manuellement son organe terminal le long des trajectoires nécessaires pour effectuer une tâche donnée. Une fois les trajectoires à reproduire enregistrées, le robot peut les rejouer sans l'intervention de l'opérateur. Cette technique a été implantée pour la première fois sur un robot industriel par Ang et al. (voir [45]) pour robotiser la soudure d'armature de navire. Sa méthode s'appuie sur l'utilisation d'une poignée munie d'un capteur d'effort 6D placée sur l'organe terminal du robot. Le capteur détecte la force et le moment exercé par l'opérateur. Le contrôleur commande alors le robot à bouger selon les signaux de force détectés. Pour y parvenir, un asservissement en impédance inspiré de Hogan [46, 47] est utilisé. cette technique commence à être de plus en plus commercialisée dans l'industrie.



FIGURE 2.6 – programmation par démonstration (lead-through programming)

2.2.3 Amplification de l'effort

L'amplification d'effort proposée dans la littérature scientifique permet de traiter deux différents problèmes de co-manipulation. Soit on souhaite augmenter le ressenti de l'opérateur en lui retournant amplifiés les faibles efforts appliqués par l'outil (exemple l'opération chirurgicale). Soit on souhaite diminuer l'effort que l'opérateur doit fournir, pour réaliser des tâches nécessitant l'application d'importants efforts sur l'outil.

2.2.3.1 Amplification de l'effort appliqué par l'opérateur

Historiquement, la première tentative de construction d'un système robotique permettant d'amplifier l'effort exercé par un opérateur a été par General Electrics avec le projet Hardiman le premier exosquelette motorisé [48]. Le projet était ambitieux et devait permettre à l'opérateur de manipuler des charges allant jusqu'à 680 kg. Le système était constitué de deux robots imbriqués se conformant à la morphologie humaine (cf. Figure 2.7.(a)). Le principe était basé sur la téléopération à retour d'effort, l'opérateur interagissait directement avec le robot intérieur nommé robot maître, le robot extérieur nommé esclave suivait alors ses gestes en appliquant des

efforts amplifiés sur l'environnement extérieur. Du fait de sa trop grande complexité, le système n'a jamais pu être stabilisé correctement et le prototype n'a jamais été mis en marche et testé par un opérateur humain. General Electric avait de grands espoirs pour Hardiman ; ils ont envisagé qu'il soit utilisé à bord des porte-avions pour le chargement de bombes, pour la construction sous-marine, dans les centrales nucléaires, et même dans l'espace, mais malgré des recherches plus poussées en 1970, concentrée sur un seul bras (*cf.* Figure 2.7.(b)). Bien qu'il pourrait soulever une charge spécifiée de 750 livres (340 kg), il pesait trois quarts de tonne, un peu plus de deux fois la charge relevable. Ainsi, le projet Hardiman a été abandonné.

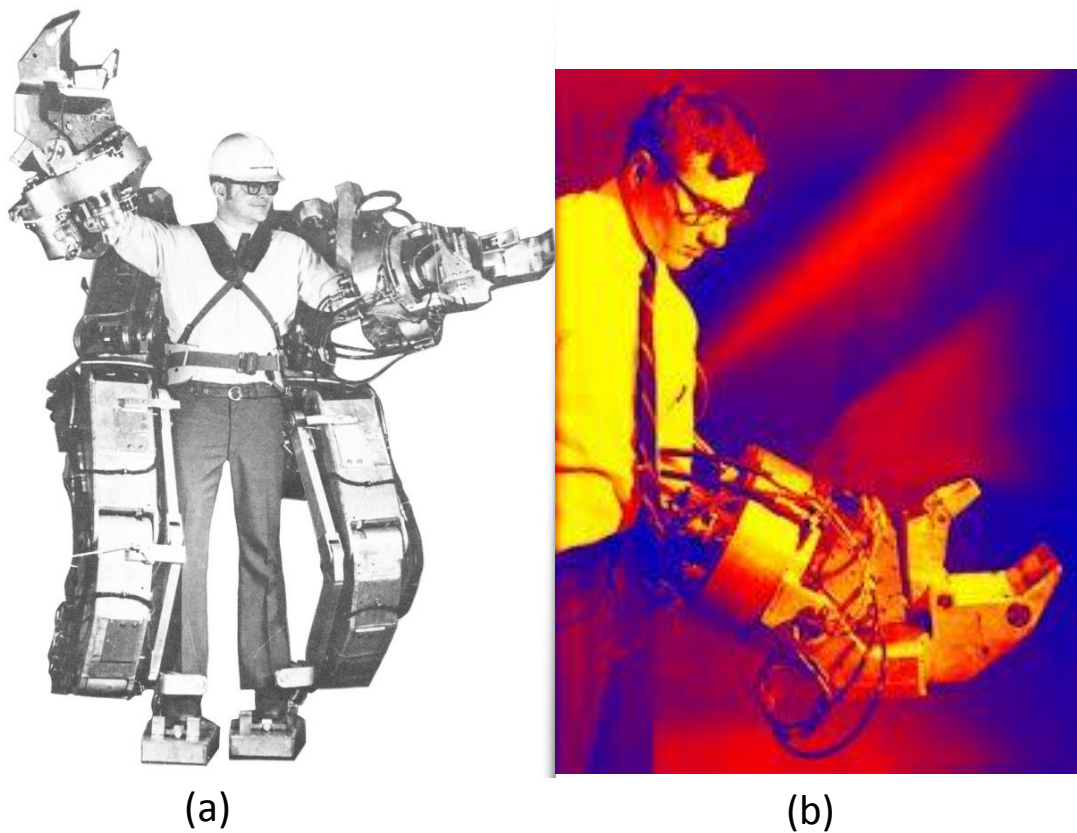


FIGURE 2.7 – Le projet Hardiman mené par Général Electric en 1969.

Plus tard, le professeur Kazerooni a repris l'idée sous l'aspect co-manipulation [38] : il a simplifié le schéma principal en supprimant le robot intérieur et a permis à l'opérateur d'interagir directement avec le robot extérieur esclave par l'intermédiaire de capteurs d'effort. Malgré le port du casque, il s'avère que la sécurité de l'opérateur est loin d'être garantie, du fait qu'il est lié d'une manière excessive au mécanisme : il est entouré d'actionneurs hydrauliques et doit insérer ses mains dans des gants attachés au bras du robot. Il y a un fort risque que l'opérateur soit écrasé par le robot en cas de dysfonctionnement (*cf.* Figure 2.8).



FIGURE 2.8 – Le projet Extender du professeur Kazerooni en 1993.

Au même moment, les professeurs Fukuda [49] et Kosuge [50], de l'université de Nagoya au Japon, entreprennent des travaux concurrents. Ils reprochent essentiellement aux travaux précédents d'être dépendants d'un modèle de l'homme et de l'environnement, ce qui peut mettre en défaut la stabilité du système s'il doit interagir avec des environnements de travail et postures d'opérateurs variés. Pour contourner ce problème de robustesse, ils ont fondé leur étude de stabilité par le critère de passivité. Le critère de passivité garantit alors la stabilité du dispositif couplé à n'importe quel autre mécanisme passif, et par extension aussi à n'importe quelle posture de l'opérateur. Ce principe a été repris récemment dans d'autres travaux, comme dans [51] avec un robot à un degré de liberté, utilisé pour la découpe de viande dans l'industrie agroalimentaire (cf. Figure 2.9). Une variante fut également proposée dans [52] où les auteurs remplacent le capteur mesurant la force de l'opérateur par un estimateur et ils appliquent leur résultat à un robot à deux degrés de liberté.

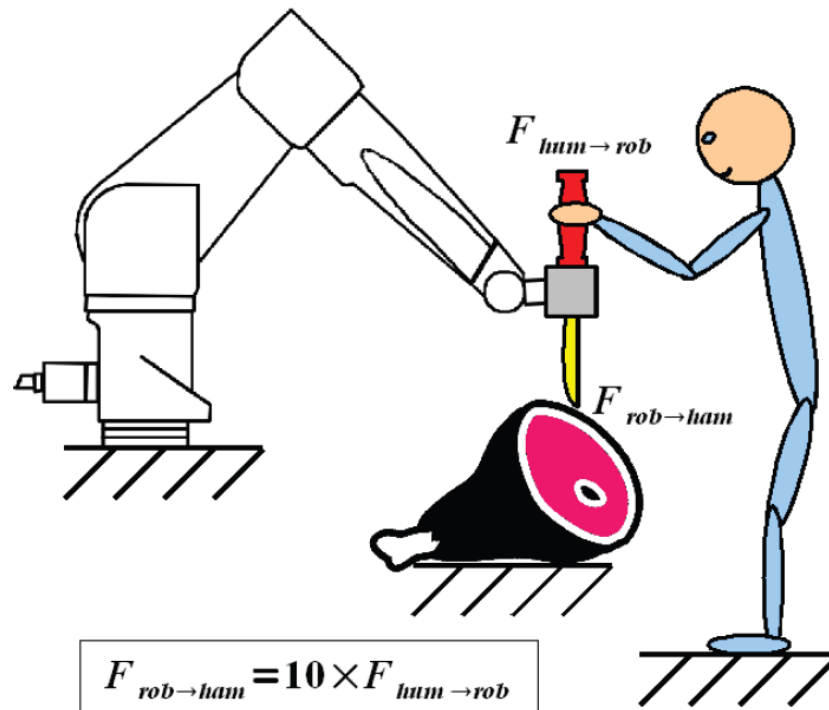


FIGURE 2.9 – Cobot pour la découpe de viande.

2.2.3.2 Amplification de l'effort ressenti par l'opérateur

Pour certaines tâches de co-manipulation, par exemple dans le cadre d'une opération chirurgicale, la littérature scientifique a montré le recours à l'amplification des efforts ressentis par l'opérateur afin qu'il manipule délicatement l'outil dont les efforts d'interaction avec l'environnement sont très faibles. Le principe reste le même que celui de l'amplification de l'effort appliqué par l'opérateur, il suffit d'invertir le rôle de l'outil et de l'opérateur, et d'adapter le dimensionnement du robot et des capteurs à des efforts plus faibles. Parmi les premiers à implanter cette fonctionnalité on note Cagneau et al. 2008 dans le cadre de la chirurgie laparoscopique, sur le robot de co-manipulation chirurgicale MC^2E (cf. Figure 2.10), afin de faire mieux ressentir au chirurgien les efforts d'interaction de l'outil sur des tissus mous et fragiles.

2.2.4 Filtrage des tremblements

Une autre fonction fondamentale de la co-manipulation est le filtrage du mouvement qui permet la suppression des tremblements et rend le geste de l'opérateur plus précis. Un bon exemple de filtrage de tremblement est celui du système Micron (voir Figure 2.11) pour l'assistance à la chirurgie de l'oeil, développé à Carnegie Mellon University aux États-Unis. Le système est

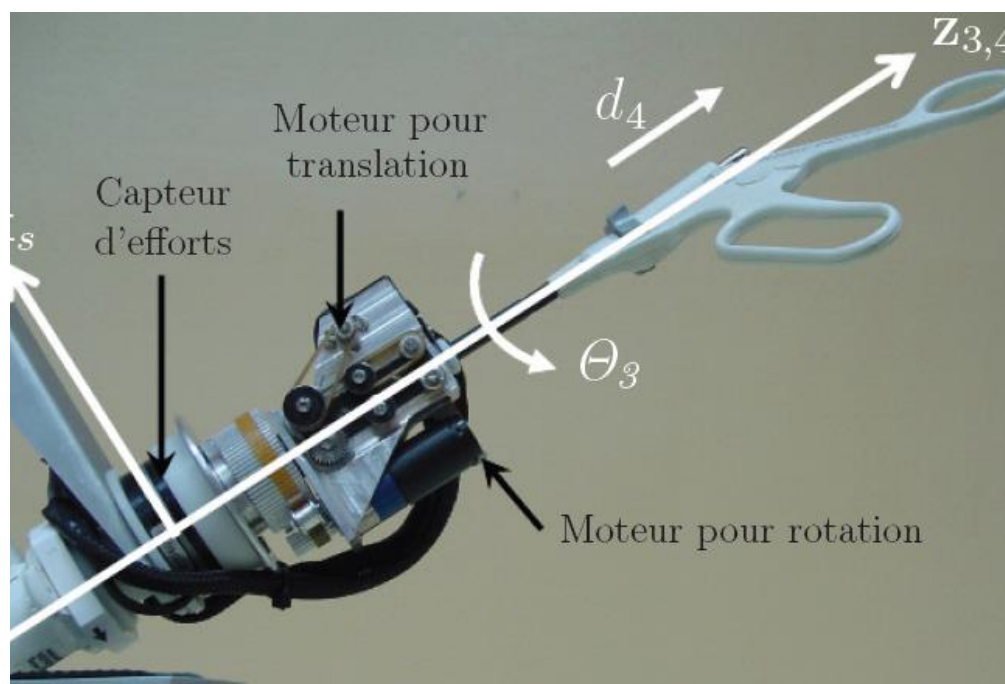


FIGURE 2.10 – Robot MC^2E exploité en co-manipulation lors d'expériences in-vivo

tenu dans la main mais la pointe n'est pas solidaire du manche. Un système à actionneurs piézo-électriques permet de faire bouger la pointe avec une très grande dynamique. Dans la manche, des accéléromètres, similaires à ceux qui sont embarqués dans une manette Wii, enregistrent les mouvements de la poignée, donc du chirurgien. Un tel filtrage permet de distinguer les mouvements à basse fréquence (lents), qui correspondent aux mouvements intentionnels et les mouvements à haute fréquence (rapides), qui sont les tremblements. Les actionneurs sont commandés pour compenser les mouvements rapides, selon un principe d'annulation qui ressemble à celui des casques anti-bruits.

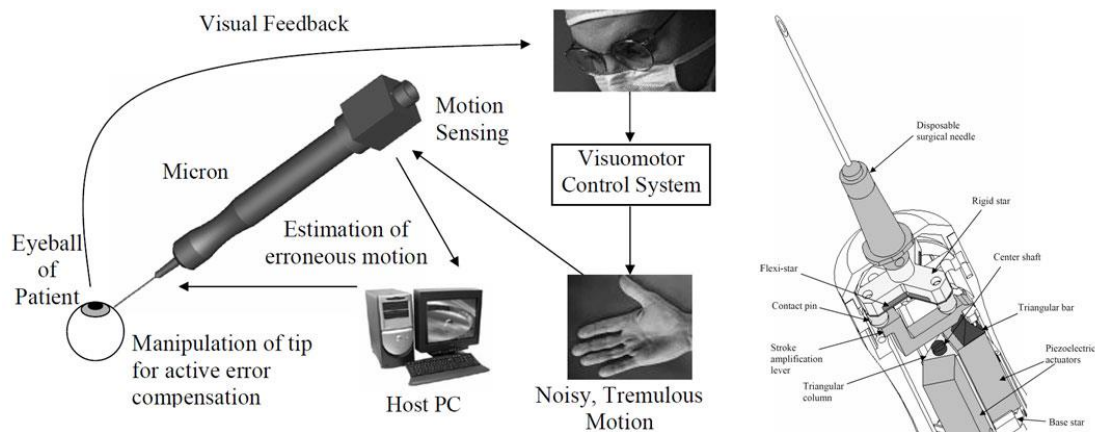


FIGURE 2.11 – Schéma de principe du système Micron pour l'assistance à la microchirurgie

Encore dans le domaine de la robotique chirurgicale, le projet Steady-Hand [53] et [54], de l'université Johns Hopkins aux États-Unis, proposent une modalité de co-manipulation qui exploite la rigidité du robot, la sensibilité des capteurs d'effort et un contrôle adéquat de type viscosité, pour permettre de manipuler très précisément un outil en supprimant les tremblements de l'opérateur. Une des applications présentées est la chirurgie de la rétine (cf. Figure 2.12).

2.2.5 Les appareils virtuels

Les appareils virtuels connus sous le nom anglais *virtual fixtures* sont définis pour la première fois dans [55]. Ce sont des logiciels générant des signaux de force et de position appliqués à l'opérateur humain par des dispositifs robotiques. Ces appareils virtuels aident les opérateurs humains à effectuer des tâches de manipulation assistées par le robot en limitant le mouvement dans des régions restreintes et/ou en orientant le mouvement le long des directions souhaitées. L'opérateur reste responsable de l'avancement de la tâche, et profite notamment de la mesure



FIGURE 2.12 – Projet SteadyHand de l'université Johns Hopkins.

absolue de la position de l'outil qu'offre le robot, sous forme de retour haptique. Les appareils virtuels [56–58] apparaissent dans la littérature sous d'autres dénominations tels que *appareils de synthèse* [59], *mouvement cartésien contraint* [60], *mécanismes virtuels* [61], *outils virtuels* [62] et aussi *chemins et surfaces virtuels* [63]. On peut distinguer deux catégories de ces mécanismes virtuels :

- Les *guides virtuels*, qui assistent l'opérateur dans son mouvement le long des chemins (trajectoires) ou des surfaces désirées.
- Les régions virtuelles interdites appelées aussi *barrières virtuelles* ou aussi *butées virtuelles* [40]

2.2.5.1 Les guides virtuels

Les guides virtuels sont assimilables à un ensemble de liaisons mécaniques idéales (c'est-à-dire des mécanismes énergétiquement neutres) qu'on connecte à l'organe terminal du robot, afin de conférer au mouvement de l'outil une loi particulière. En misant sur la précision des systèmes robotiques, tout en maintenant un degré de contrôle de l'opérateur, les systèmes homme-robot avec guides virtuels permettent d'obtenir un fonctionnement plus précis, plus sécurisé et plus rapide. Pour bien comprendre l'avantage des guides virtuels, considérons la cas de la règle. Une

ligne droite dessinée à l'aide de la règle est plus propre et plus rapide que celle dessinée à la main. De même, un robot peut exercer des forces ou imposer des positions à l'opérateur humain afin de réaliser la même tâche. Cependant, un robot (ou une interface haptique) a la capacité de fournir une assistance de différents types, niveau et géométrie. Par exemple, pour une tâche de perçage, le robot peut contraindre la mèche de la perceuse à rester toujours perpendiculaire au plan de perçage, et laisser libre l'opérateur d'imposer à l'outil la position et l'effort de perçage.

Les guides virtuels imposent des contraintes de vitesse et d'effort dans des sous espaces complémentaires (obtenus en définissant un repère pour l'espace des tâches et une matrice de sélection). La notion de contrôle hybride Position/Force pour les robots manipulateurs est introduite dans [64]. En effet, il est possible de conférer au robot le comportement de liaisons mécaniques quelconques en sommant les sorties d'une boucle de position et d'une boucle d'effort dont les erreurs sont projetées sur leurs sous-espaces respectifs. Afin de faciliter le choix et la définition de ces sous-espaces, Joly et al [61] ont introduit la notion de mécanismes virtuels. Ils ont proposé à l'occasion une implémentation plus robuste des guides virtuels : la commande en effort du robot est calculée à partir de la simulation d'un mécanisme virtuel passif, relié à l'effecteur du robot par un système ressort/amortisseur fictif. L'avantage est que la stabilité du système est indépendante du mécanisme virtuel choisi. Ce qui donne la possibilité de régler une fois pour toute la raideur et l'amortissement du système ressort/amortisseur fictif, pour une plateforme robotique donnée. Les guides virtuels peuvent aussi en être utiles pour réduire les efforts fournis par l'opérateur lorsqu'il déplace une inertie importante. Plus la vitesse de déplacement de l'objet lourd est grande, plus les efforts nécessaires pour modifier la direction de son déplacement doivent être importants. Les travaux de Wannasuphopras et al. [5, 9] montrent qu'en ajustant automatiquement l'orientation du robot en fonction de l'effort appliqué par l'opérateur, on pourra diminuer d'une manière très remarquable les efforts nécessaires pour modifier la trajectoire du solide en mouvement. Les roues du robot proposé (cf. Figure 2.14) jouent le rôle de guide virtuel qui s'adaptent à l'intention de l'opérateur. Plus récemment dans [65], cette idée a été généralisée. Une architecture d'un cobot capable de réaliser des guides virtuels dans un espace de travail 3D sans recourir à de puissants actionneurs a été proposée. Ce cobot composé de Variateur de vitesse mécanique (continuously variable transmission (CVT) en anglais), permet de réaliser des guides virtuels extrêmement rigides et forts, de manière intrinsèquement sûre (sans moteur, ou avec une motorisation de faible puissance).

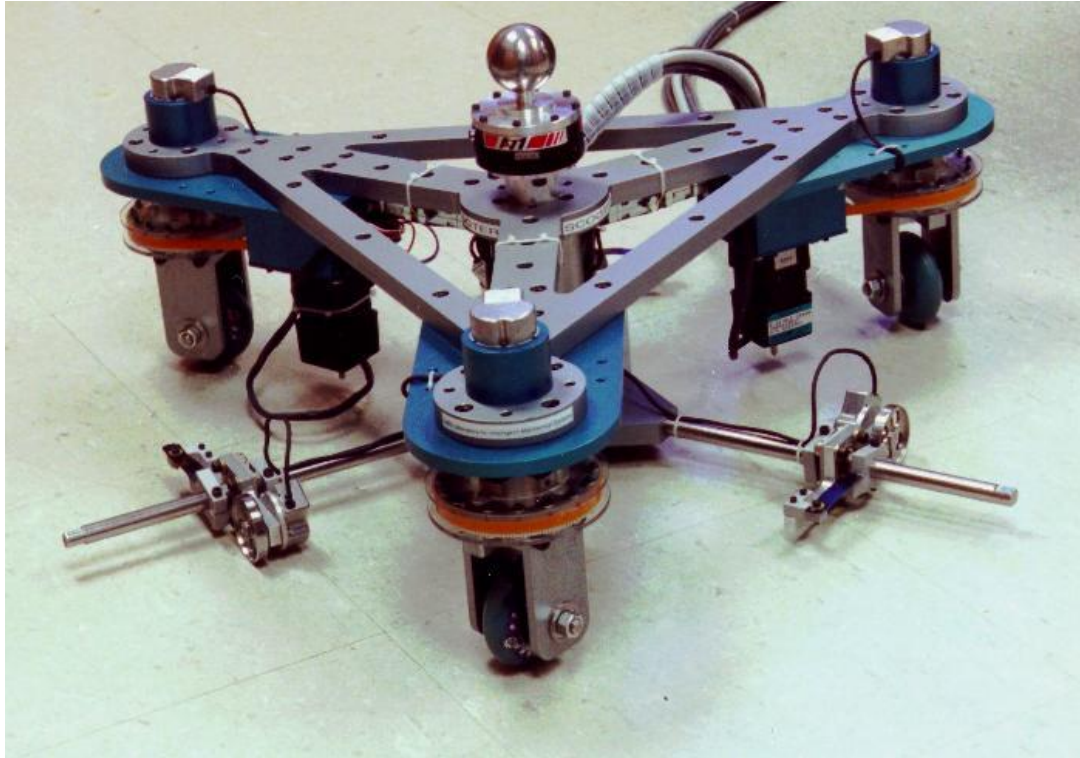


FIGURE 2.13 – Le cobot scooter.

2.2.5.2 Les butées virtuelles

Les butées virtuelles peuvent être décrites par des surfaces délimitant une zone de l'espace de travail dans lequel l'organe terminal doit rester confiné. Rosenberg [55] a mis en oeuvre les butées virtuelles comme des surfaces d'impédances sur le dispositif maître afin d'assister l'opérateur lors de la réalisation de la mise en place des chevilles dans les trous. Jakopcic dans [66] a mis en oeuvre des butées virtuelles pour les opérations de pose de prothèse du genou sur le robot Acrobot. Le chirurgien co-manipule une fraiseuse afin d'usiner dans l'os du patient la zone qui recevra la prothèse. Les butées virtuelles permettent de respecter au mieux la surface de découpe préprogrammée, tout en laissant au chirurgien la totale maîtrise de la procédure. Le système Surgicobot de la Figure 2.15 exploite la même idée pour le guidage du geste du praticien en chirurgie maxillo-faciale pour la protection du nerf maxillaire. Transparent par conception, ce robot utilise un retour implicite d'effort (sans capteur d'efforts) par une commande en raideur qui produit les forces de guidage. En juin 2006, le système Mako's RIOTM est commercialisé par la société Mako Surgical pour la même opération (cf. Figure 2.16). Le bras du robot s'appuie sur la technologie de réducteurs à câbles du robot WAMTM de Barrett Technology (cf. Figure 2.17),



FIGURE 2.14 – Système de co-manipulation acrobot.

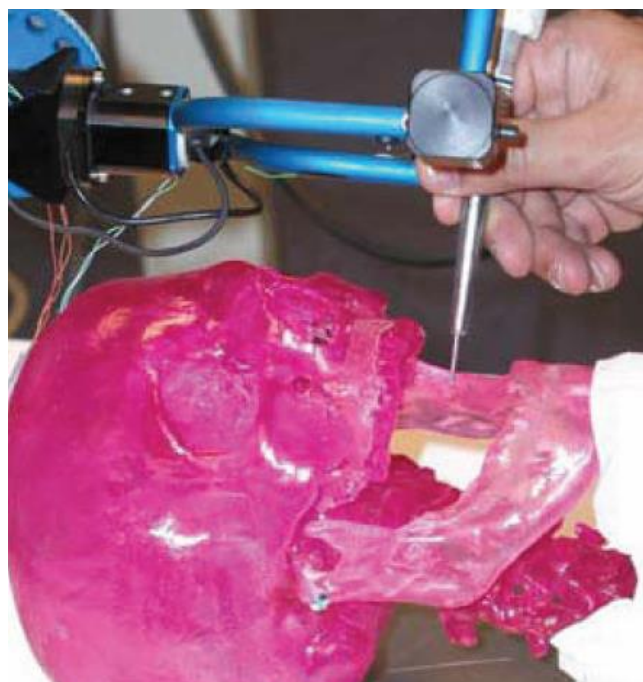


FIGURE 2.15 – Système de co-manipulation Surgicobot opérant sur un crâne en résine.

légère et mécaniquement réversible, ce qui permet comme pour le cas du Surgicobot de s'affranchir du capteur d'effort. En 4 ans, près de 4000 opérations ont été réalisées à l'aide de ce système.



FIGURE 2.16 – Le robot Mako's RIOTM.



FIGURE 2.17 – Le robot WAMTM de Barrett Technology.

Chapitre 3

Les modèles de robots étudiés

Sommaire

1.1	Les exigences de co-manipulation : compromis	107
1.2	La co-manipulation comme un problème de commande optimale	109
1.2.1	Notations	109
1.2.2	Formulation du problème de co-manipulation	110
1.3	Stratégie de commande	111
1.3.1	Le contrôle d'impédance : une solution à améliorer	111
1.3.2	Architecture de commande du cobot	112
1.3.3	Colinéarité entre la force et la vitesse de l'organe terminal	113

3.1 Modélisation du Penducobot par application du Principe Fondamental de la Dynamique

3.1.1 Notations & nomenclature

- $\mathbb{B} = (\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ désigne une base fixe.
- $\mathbb{B}_\theta = (\vec{U}_\theta, \vec{V}_\theta, \vec{Z})$ est la base tournante, dont le vecteur \vec{U}_θ est colinéaire à \vec{OP} .
- $\mathbb{B}_\varphi = (\vec{U}_\varphi, \vec{V}_\varphi, \vec{Z})$ est la base tournante, repérée par l'angle $\theta + \varphi$, dont le vecteur \vec{V}_φ est colinéaire à \vec{AM} .
- L'homme est en contact avec le robot au point P , d'où il est supposé appliquer une action mécanique, se traduisant par un couple C_h au point O .

Dans cette section, on présente la construction du modèle dynamique du cobot représenté dans la Figure 3.2. Ce cobot est composé d'un bras motorisé qui interagit directement avec un être humain. Une charge pendulaire est en liaison libre (sans actionnement) avec le bras porteur au niveau du point A, avec $\vec{OA} = L\vec{U}_\theta$. L'utilisateur du cobot est en contact direct avec celui-ci au point P.

- Le bras principal du robot (bras porteur) est un solide rigide noté B, correspondant à une barre rectiligne de masse m et homogène. La position de ce bras est représentée par le vecteur $\vec{OA} = L\vec{U}_\theta$.
- Le solide S_2 est constitué de la charge à soulever par le bras porteur, correspondant à une masse ponctuelle M, et d'une tige rigide et sans masse, en liaison pivot avec le bras B. La position de ce solide est représentée par le vecteur $\vec{AM} = -h\vec{V}_\varphi$
- Le robot est équipé d'un moteur exerçant un couple C_m sur le bras B au point O.
- Les articulations du robot, aux points O et A, sont supposées être des liaisons pivots d'axe \vec{Z} avec frottement. Le couple de frottement au point O est noté C_{fO} et correspond à l'action du bâti sur la barre porteuse. Le couple de frottement au point A est noté C_{fA} et correspond à l'action de la masse sur la barre porteuse.

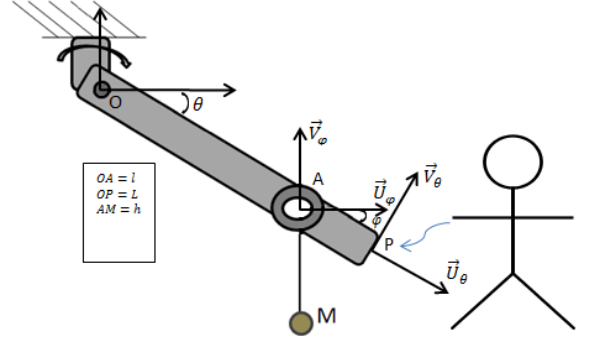


FIGURE 3.2 – Robot à un bras, supportant une charge pendulaire.

3.1.2 Bilan des actions mécaniques extérieures

On considère le système mécanique décrit dans la Figure 3.2. Le bilan des actions mécaniques internes et externes à ce système est présenté ci-après.

3.1.2.1 Inventaire des actions mécaniques extérieures au bras B

1. Action de l'homme H sur le bras porteur B

En supposant que l'homme n'exerce pas de couple au point P, il applique une force notée

$$\vec{F}_{h \rightarrow B} := H_x \vec{X} + H_y \vec{Y}, \quad (\text{II.3.1.1})$$

$$:= \tilde{H}_x \vec{U}_\theta + \tilde{H}_y \vec{V}_\theta, \quad (\text{II.3.1.2})$$

et un moment, nul au point P , noté

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_P(H \rightarrow B)} := \vec{0}. \quad (\text{II.3.1.3})$$

Le torseur de l'action de l'homme sur la barre porteuse s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{c} H \rightarrow B \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{h \rightarrow B}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P, \quad (\text{II.3.1.4})$$

ce qui donne dans la base fixe \mathbb{B} :

Au point d'application P

$$\left\{ \begin{array}{c} H \rightarrow B \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{c|c} H_x & \dots \\ H_y & \dots \\ \dots & 0 \end{array} \right\}_{P, \mathbb{B}} = \left\{ \begin{array}{c|c} \tilde{H}_x & \dots \\ \tilde{H}_y & \dots \\ \dots & 0 \end{array} \right\}_{P, \mathbb{B}_\theta}. \quad (\text{II.3.1.5})$$

Exprimé au point A

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} H \rightarrow B \end{array} \right\}_A &= \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{h \rightarrow B}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_A(H \rightarrow B)} = \vec{AP} \wedge \overrightarrow{F_{h \rightarrow B}} \end{array} \right\}_A, \\ &= \left\{ \begin{array}{c|c} H_x & \dots \\ H_y & \dots \\ \dots & (L-l)(H_y \cos \theta - H_x \sin \theta) \end{array} \right\}_{A, \mathbb{B}}, \\ &= \left\{ \begin{array}{c|c} \tilde{H}_x & \dots \\ \tilde{H}_y & \dots \\ \dots & (L-l)\tilde{H}_y \end{array} \right\}_{A, \mathbb{B}_\theta}. \end{aligned} \quad (\text{II.3.1.6})$$

Exprimé au point O

$$\begin{aligned}
 \left\{ H \rightarrow B \right\}_O &= \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{h \rightarrow B}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_O(H \rightarrow B)} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{F_{h \rightarrow B}} \end{array} \right\}_O, \\
 &= \left\{ \begin{array}{c|c} H_x & \dots \\ H_y & \dots \\ \dots & L(H_y \cos \theta - H_x \sin \theta) \end{array} \right\}_{O, \mathbb{B}}, \\
 &= \left\{ \begin{array}{c|c} \tilde{H}_x & \dots \\ \tilde{H}_y & \dots \\ \dots & L\tilde{H}_y \end{array} \right\}_{O, \mathbb{B}_\theta}.
 \end{aligned} \tag{II.3.1.7}$$

2. Action du moteur *Mot* sur le bras porteur B

Le moteur est situé au niveau de la liaison pivot entre le bras *B* et le bâti S_0 , c'est-à-dire au point *O*. Il exerce un couple mécanique noté C_m . L'action du moteur *Mot* sur le bras porteur *B* est décrite par le torseur

$$\left\{ Mot \rightarrow B \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{Z} \end{array} \right\}_O, \tag{II.3.1.8}$$

Ce torseur est identique quel que soit le point d'expression. Ainsi,

$$\left\{ Mot \rightarrow B \right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & \dots \\ 0 & \dots \\ \dots & C_m \end{array} \right\}_{\dots} \tag{II.3.1.9}$$

3. Action de la gravité sur le bras porteur B

Soit *G* le point désignant le centre de gravité du bras porteur *B*, de sorte que $\overrightarrow{OG} = r_G \vec{U}_\theta$. On prendra $r_G = \frac{1}{2}L$. La constante de gravité est notée *g*. La force exercée par la gravité s'écrit $\overrightarrow{F_{Grav \rightarrow B}} = -mg \vec{Y}$. L'action de la gravité *Grav* sur le bras porteur *B* est ainsi décrite

par le torseur

$$\left\{ \begin{array}{c} Grav \rightarrow B \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -mg \vec{Y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G. \quad (\text{II.3.1.10})$$

Dans la base \mathbb{B}_θ , la force exercé par la gravité s'écrit

$$\overrightarrow{F_{Grav \rightarrow B}} = (-mg \sin \theta \vec{U}_\theta - mg \cos \theta \vec{V}_\theta). \quad (\text{II.3.1.11})$$

Exprimé au point A, ce torseur s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{c} Grav \rightarrow B \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{Grav \rightarrow B}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_A(Grav \rightarrow B)} = \vec{AG} \wedge \overrightarrow{F_{Grav \rightarrow B}} \end{array} \right\}_A, \quad (\text{II.3.1.12})$$

où

$$\vec{AG} \wedge \overrightarrow{F_{Grav \rightarrow B}} = (r_G - l) \vec{U}_\theta \wedge (-mg \vec{Y}) \quad (\text{II.3.1.13})$$

$$= -(r_G - l) mg \cos \theta \vec{Z}. \quad (\text{II.3.1.14})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} Grav \rightarrow B \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & \dots \\ -mg & \dots \\ \dots & -(r_G - l) mg \cos \theta \end{array} \right\}_{A, \mathbb{B}} \\ &= \left\{ \begin{array}{c|c} -mg \sin(\theta) & \dots \\ -mg \cos(\theta) & \dots \\ \dots & -(r_G - l) mg \cos \theta \end{array} \right\}_{A, \mathbb{B}_\theta}. \end{aligned} \quad (\text{II.3.1.15})$$

4. Exprimé au point O, ce torseur s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{c} Grav \rightarrow B \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{Grav \rightarrow B}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_O(Grav \rightarrow B)} = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{F_{Grav \rightarrow B}} \end{array} \right\}_O, \quad (\text{II.3.1.16})$$

où

$$\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{F_{Grav \rightarrow B}} = r_G \overrightarrow{U_\theta} \wedge (-mg \overrightarrow{Y}) \quad (\text{II.3.1.17})$$

$$= -r_G mg \cos \theta \overrightarrow{Z}. \quad (\text{II.3.1.18})$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} Grav \rightarrow B \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & \dots \\ -mg & \dots \\ \dots & -r_G mg \cos \theta \end{array} \right\}_{O, \mathbb{B}}, \\ &= \left\{ \begin{array}{c|c} -mg \sin(\theta) & \dots \\ -mg \cos(\theta) & \dots \\ \dots & -r_G mg \cos \theta \end{array} \right\}_{O, \mathbb{B}_\theta}. \end{aligned} \quad (\text{II.3.1.19})$$

5. Action de liaison du bâti S_0 sur le bras porteur B

La liaison du bâti S_0 au bras porteur B est de type pivot d'axe (O, \overrightarrow{Z}) . Cette liaison est avec frottement, le couple de frottement associé est noté C_{fO} . L'action du bâti S_0 sur le bras porteur B est décrite par le torseur

$$\left\{ \begin{array}{c} S_0 \rightarrow B \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{01} & \dots \\ Y_{01} & \dots \\ \dots & C_{fO} \end{array} \right\}_{O, \mathbb{B}} = \left\{ \begin{array}{c|c} \tilde{X}_{01} & \dots \\ \tilde{Y}_{01} & \dots \\ \dots & C_{fO} \end{array} \right\}_{O, \mathbb{B}_\theta}. \quad (\text{II.3.1.20})$$

où X_{01} et Y_{01} (ou \tilde{X}_{01} et \tilde{Y}_{01}) sont des inconnues de liaison, à déterminer.

6. Action de liaison de la charge pendulaire S_2 sur le bras porteur B

La liaison de la charge pendulaire S_2 au bras porteur B est de type pivot d'axe (A, \overrightarrow{Z}) . Cette liaison est avec frottement, le couple de frottement associé est noté C_{fA} . L'action de

la charge pendulaire S_2 sur le bras porteur B est décrite par le torseur

$$\left\{ \begin{array}{c} S_2 \rightarrow B \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{21} & \dots \\ Y_{21} & \dots \\ \dots & C_{fA} \end{array} \right\}_{A, \mathbb{B}} = \left\{ \begin{array}{c|c} \tilde{X}_{21} & \dots \\ \tilde{Y}_{21} & \dots \\ \dots & C_{fA} \end{array} \right\}_{A, \mathbb{B}_\theta} . \quad (\text{II.3.1.21})$$

où X_{21} et Y_{21} (ou \tilde{X}_{21} et \tilde{Y}_{21}) sont des inconnues de liaison, à déterminer.

3.1.2.2 Inventaire des actions mécaniques extérieures à la charge pendulaire S_2

1. Action de liaison du bras porteur B à la charge pendulaire S_2

Par le principe « d'action-réaction » (ou principe des actions réciproques), l'action du bras porteur B sur la charge pendulaire S_2 est décrite, au point A , par le torseur

Au point A

$$\left\{ \begin{array}{c} B \rightarrow S_2 \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{c} S_2 \rightarrow B \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} -X_{21} & \dots \\ -Y_{21} & \dots \\ \dots & -C_{fA} \end{array} \right\}_{A, \mathbb{B}} = \left\{ \begin{array}{c|c} -\tilde{X}_{21} & \dots \\ -\tilde{Y}_{21} & \dots \\ \dots & -C_{fA} \end{array} \right\}_{A, \mathbb{B}_\theta} , \quad (\text{II.3.1.22})$$

Au point O

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} B \rightarrow S_2 \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c|c} -X_{21} & \dots \\ -Y_{21} & \dots \\ \dots & -C_{fA} - l(X_{21} \cos \theta + Y_{21} \sin \theta) \end{array} \right\}_{O, \mathbb{B}} \\ &= \left\{ \begin{array}{c|c} -\tilde{X}_{21} & \dots \\ -\tilde{Y}_{21} & \dots \\ \dots & -C_{fA} - l - \tilde{Y}_{21} \end{array} \right\}_{O, \mathbb{B}_\theta} . \end{aligned} \quad (\text{II.3.1.23})$$

2. Action de la gravité $Grav$ sur la charge pendulaire S_2

La charge pendulaire est soumise à l'action de la gravité, localisée au point M , $\overrightarrow{F_{Grav}} \rightarrow S_2 =$

$-Mg \vec{Y}$. l'action de la gravité est décrite par le torseur

$$\left\{ \begin{array}{c} Grav \rightarrow S_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -Mg \vec{Y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M. \quad (\text{II.3.1.24})$$

Dans la base \mathbb{B}_θ , la force exercé par la gravité s'écrit

$$\overrightarrow{F_{Grav \rightarrow S_2}} = \left(-Mg \sin \theta \vec{U}_\theta - Mg \cos \theta \vec{V}_\theta \right). \quad (\text{II.3.1.25})$$

Exprimé au point A, ce torseur s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{c} Grav \rightarrow S_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{Grav \rightarrow S_2}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_A(Grav \rightarrow S_2)} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F_{Grav \rightarrow S_2}} \end{array} \right\}_A, \quad (\text{II.3.1.26})$$

où

$$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F_{Grav \rightarrow S_2}} = \left(-h \vec{V}_\varphi \right) \wedge \left(-Mg \vec{Y} \right) \quad (\text{II.3.1.27})$$

$$= -Mhg \sin(\theta + \varphi) \vec{Z}. \quad (\text{II.3.1.28})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} Grav \rightarrow S_2 \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & \dots \\ -Mg & \dots \\ \dots & -hMg \sin(\theta + \varphi) \end{array} \right\}_{A, \mathbb{B}} \\ &= \left\{ \begin{array}{c|c} -Mg \sin \theta & \dots \\ -Mg \cos \theta & \dots \\ \dots & -hMg \sin(\theta + \varphi) \end{array} \right\}_{A, \mathbb{B}_\theta}. \end{aligned} \quad (\text{II.3.1.29})$$

3.1.3 Application du principe fondamentale de la dynamique

3.1.3.1 A la charge S_2

Ce principe s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{c} Grav \rightarrow S_2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} B \rightarrow S_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{D}(S_2/R) \end{array} \right\}, \quad (\text{II.3.1.30})$$

où le second membre correspond au torseur dynamique du solide S_2 par rapport au repère R , soit, exprimé au point A

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{D}(S_2/R) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} M\overrightarrow{\Gamma}_{M/R} \\ \overrightarrow{\delta}_A(S_2/R) \end{array} \right\}_A. \quad (\text{II.3.1.31})$$

Remarque 3. Notons que le point M correspond au centre de gravité du solide S_2 .

1. Calcul des composantes du torseur dynamique

– Calcul de l'accélération et des caractéristiques cinématiques de M

$$\overrightarrow{\Gamma}_{M/R} = \left[\begin{array}{c} \frac{d\overrightarrow{V}_{M/R}}{dt} \end{array} \right]_R. \quad (\text{II.3.1.32})$$

Comme on a :

$$\overrightarrow{OM} = l\overrightarrow{U}_\theta - h\overrightarrow{V}_\phi, \quad (\text{II.3.1.33})$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V}_{M/R} &= \left[\begin{array}{c} \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \end{array} \right]_R, \\ &= l\dot{\theta}\overrightarrow{V}_\theta + h(\dot{\theta} + \dot{\phi})\overrightarrow{U}_\phi, \end{aligned} \quad (\text{II.3.1.34})$$

alors,

$$\overrightarrow{\Gamma_{M/R}} = -l\dot{\theta}^2\overrightarrow{U_\theta} + l\ddot{\theta}\overrightarrow{V_\theta} + h(\ddot{\theta} + \ddot{\phi})\overrightarrow{U_\phi} + h(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2\overrightarrow{V_\phi}. \quad (\text{II.3.1.35})$$

Les projections de ces vecteurs sur $\overrightarrow{U_\theta}$ donnent :

$$\overrightarrow{\Gamma_{M/R}} \cdot \overrightarrow{U_\theta} = -l\dot{\theta}^2 + h(\ddot{\theta} + \ddot{\phi})\cos\varphi - h(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2\sin\varphi, \quad (\text{II.3.1.36})$$

$$\overrightarrow{V_{M/R}} \cdot \overrightarrow{U_\theta} = h(\dot{\theta} + \dot{\phi})\cos\varphi, \quad (\text{II.3.1.37})$$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{U_\theta} = l - h\sin\varphi. \quad (\text{II.3.1.38})$$

Les projections de ces vecteurs sur $\overrightarrow{V_\theta}$ donnent :

$$\overrightarrow{\Gamma_{M/R}} \cdot \overrightarrow{V_\theta} = l\ddot{\theta} + h(\ddot{\theta} + \ddot{\phi})\sin\varphi + h(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2\cos\varphi, \quad (\text{II.3.1.39})$$

$$\overrightarrow{V_{M/R}} \cdot \overrightarrow{V_\theta} = l\dot{\theta} + h(\dot{\theta} + \dot{\phi})\sin\varphi, \quad (\text{II.3.1.40})$$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{V_\theta} = -h\cos\varphi. \quad (\text{II.3.1.41})$$

– Calcul du moment dynamique et des caractéristiques cinétiques de M

Le moment dynamique du solide S_2 au point A s'écrit

$$\overrightarrow{\sigma_A(S_2/R)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_A(S_2/R)}}{dt} \right]_R + M\overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \overrightarrow{V_{M/R}} \quad (\text{II.3.1.42})$$

où $\overrightarrow{\sigma_A(S_2/R)}$ est le moment cinétique au point A du solide S_2 par rapport au référentiel galiléen R et s'écrit

$$\overrightarrow{\sigma_A(S_2/R)} = M\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{A \in S_2/R}} + \mathcal{I}_{A,S_2}(\overrightarrow{\Omega_{(S_2/R)}}), \quad (\text{II.3.1.43})$$

et où $\mathcal{I}_{A,S_2}(\overrightarrow{\Omega_{(S_2/R)}})$ désigne l'opérateur d'inertie, défini comme suit

$$\mathcal{I}_{A,S_2}(\overrightarrow{\Omega_{(S_2/R)}}) = \int_{\forall M \in S_2} \overrightarrow{AM} \wedge \left((\overrightarrow{\Omega_{(S_2/R)}}) \wedge \overrightarrow{AM} \right) dm. \quad (\text{II.3.1.44})$$

Par composition des vitesses, on a

$$\overrightarrow{V_{A \in S_2/R}} = \overrightarrow{V_{A \in S_2/R_\varphi}} + \overrightarrow{V_{A \in R_\varphi/R}}. \quad (\text{II.3.1.45})$$

Or $\overrightarrow{V_{A \in S_2/R_\varphi}} = \vec{0}$ car S_2 est fixe dans R_φ , donc $\overrightarrow{V_{A \in S_2/R}} = \left[\begin{array}{c} \frac{d\vec{OA}}{dt} \end{array} \right]_R$ avec $\vec{OA} = l\vec{U}_\theta$.

D'où

$$\overrightarrow{V_{A \in S_2/R}} = l\dot{\theta}\vec{V}_\theta. \quad (\text{II.3.1.46})$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \vec{AM} \wedge \overrightarrow{V_{A \in S_2/R}} &= (-h\vec{V}_\varphi) \wedge (l\dot{\theta}\vec{V}_\theta), \\ &= hl\dot{\theta} \sin \varphi \vec{Z}. \end{aligned} \quad (\text{II.3.1.47})$$

L'opérateur d'inertie $\mathcal{I}_{A,S_2}()$ est associé à la matrice d'inertie notée $\left[J_{A,S_2} \right]_{\mathbb{B}}$. D'après

le théorème de Huygens,

$$\left[J_{A,S_2} \right]_{\mathbb{B}} = \left[J_{M,S_2} \right]_{\mathbb{B}} + M \begin{bmatrix} (y_M^2 + z_M^2) & -x_M y_M & -x_M z_M \\ -x_M y_M & x_M^2 + z_M^2 & -y_M z_M \\ -x_M z_M & -y_M z_M & (x_M^2 + y_M^2) \end{bmatrix}_{\mathbb{B}}, \quad (\text{II.3.1.48})$$

où x_M, y_M et z_M sont les coordonnées du centre de gravité M du solide S_2 dans le repère (A, \mathbb{B}) . Comme M est le centre d'inertie de S_2 (masse ponctuelle située en bout d'une

tige sans masse) $\left[J_{M,S_2} \right]_{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbb{B}}$. Ainsi

$$\left[J_{A,S_2} \right]_{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} Mh^2 \cos^2(\theta + \varphi) & Mh^2 \sin(\theta + \varphi) \cos(\theta + \varphi) & 0 \\ Mh^2 \sin(\theta + \varphi) \cos(\theta + \varphi) & Mh^2 \sin^2(\theta + \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & Mh^2 \end{bmatrix}_{\mathbb{B}}. \quad (\text{II.3.1.49})$$

Par conséquent,

$$\mathcal{J}_{A,S_2}(\overrightarrow{\Omega_{(S_2/R)}}) = Mh^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \overrightarrow{Z}, \quad (\text{II.3.1.50})$$

et on en déduit le moment cinétique

$$\overrightarrow{\sigma_A(S_2/R)} = M \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{A \in S_2/R}} + \mathcal{J}_{A,S_2}(\overrightarrow{\Omega_{(S_2/R)}}), \quad (\text{II.3.1.51})$$

$$= (Mhl\dot{\theta} \sin \varphi + Mh^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})) \overrightarrow{Z}. \quad (\text{II.3.1.52})$$

Le calcul du moment dynamique requiert le calcul de $\overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \overrightarrow{V_{M/R}}$. On a $\overrightarrow{V_{A/R}} = l\dot{\theta}\overrightarrow{V_\theta}$ et $\overrightarrow{V_{M/R}} = l\dot{\theta}\overrightarrow{V_\theta} + h(\ddot{\theta} + \ddot{\phi})\overrightarrow{U_\phi}$. Ainsi

$$\overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \overrightarrow{V_{M/R}} = -hl\dot{\theta} (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) \cos \varphi \overrightarrow{Z}. \quad (\text{II.3.1.53})$$

On en déduit l'expression du moment dynamique recherché

$$\overrightarrow{\delta_A(S_2/R)} = Mh (l\ddot{\theta} \sin(\varphi) - l\dot{\theta}^2 \cos(\varphi) + h(\ddot{\theta} + \ddot{\phi})) \overrightarrow{Z}. \quad (\text{II.3.1.54})$$

2. Théorème de la résultante dynamique

Ce théorème traduit le fait que la somme des forces mécaniques extérieures à S_2 , notées $\overrightarrow{F_{S_2^{(i)} \rightarrow S_2}}$, est égale à la résultante dynamique de ce solide :

$$\sum_i \overrightarrow{F_{S_2^{(i)} \rightarrow S_2}} = M \overrightarrow{\Gamma_{M/R}}. \quad (\text{II.3.1.55})$$

Autrement dit, dans le cas présent,

$$\overrightarrow{F_{Grav \rightarrow S_2}} + \overrightarrow{F_{B \rightarrow S_2}} = M \overrightarrow{\Gamma_{M/R}}. \quad (\text{II.3.1.56})$$

Après projection suivant les vecteurs $\overrightarrow{U_\theta}$ et $\overrightarrow{V_\theta}$

$$-Mg \sin \theta - \tilde{X}_{21} = M \left(-l\dot{\theta}^2 + h(\ddot{\phi} + \ddot{\theta}) \cos \varphi - h(\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 \sin \varphi \right), \quad (\text{II.3.1.57})$$

$$-Mg \cos \theta - \tilde{Y}_{21} = M \left(l\ddot{\theta} + h(\ddot{\phi} + \ddot{\theta}) \sin \varphi + h(\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 \cos \varphi \right), \quad (\text{II.3.1.58})$$

d'où on en déduit les inconnues de liaison

$$\tilde{X}_{21} = -M \left(g \sin \theta - l\dot{\theta}^2 + h(\ddot{\phi} + \ddot{\theta}) \cos \varphi - h(\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 \sin \varphi \right), \quad (\text{II.3.1.59})$$

$$\tilde{Y}_{21} = -M \left(g \cos \theta + l\ddot{\theta} + h(\ddot{\phi} + \ddot{\theta}) \sin \varphi + h(\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 \cos \varphi \right), \quad (\text{II.3.1.60})$$

3. Théorème du moment dynamique

Ce théorème traduit le fait que la somme des moments mécaniques extérieures à S_2 au point A , notés $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{S_2^{(i)}} \rightarrow S_2)$, est égale au moment dynamique de ce solide au même point :

$$\sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{S_2^{(i)}} \rightarrow S_2) = M \overrightarrow{\delta}_A(S_2/R). \quad (\text{II.3.1.61})$$

Autrement dit, dans le cas présent,

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\text{Grav} \rightarrow S_2) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(B \rightarrow S_2) = \overrightarrow{\delta}_A(S_2/R), \quad (\text{II.3.1.62})$$

où $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\text{Grav} \rightarrow S_2) = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F_{\text{Grav} \rightarrow S_2}} = -hMg \sin(\theta + \varphi) \overrightarrow{Z}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(B \rightarrow S_2) = -C_{fA} \overrightarrow{Z}$. Ainsi, l'équation de mouvement issue de l'application de ce théorème, projeté sur l'axe (A, \overrightarrow{Z}) , s'écrit

$$-Mhg \sin \theta + \varphi - C_{fA} = Mh (l\ddot{\theta} \sin \varphi - l\dot{\theta}^2 \cos \varphi + h(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi})). \quad (\text{II.3.1.63})$$

3.1.3.2 A la barre porteuse B

Ce principe s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{c} H \rightarrow B \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{Grav} \rightarrow B \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{Mot} \rightarrow B \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} S_2 \rightarrow B \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} S_0 \rightarrow B \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} D(B/R) \end{array} \right\}, \quad (\text{II.3.1.64})$$

ou le second membre correspond au torseur dynamique du solide B par rapport au repère R , soit, exprimé au point O

$$\left\{ \begin{array}{c} D(S_2/R) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} m\overrightarrow{\Gamma}_{G/R} \\ \overrightarrow{\delta}_O(B/R) \end{array} \right\}_O. \quad (\text{II.3.1.65})$$

1. Calcul des composantes du torseur dynamique

– Calcul de l'accélération et des caractéristiques cinématiques de B

$$\overrightarrow{OG} = r_G \overrightarrow{U}_\theta, \quad (\text{II.3.1.66})$$

$$V_{G/R} = \left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \right]_R, \quad (\text{II.3.1.67})$$

$$= r_G \dot{\theta} \overrightarrow{V}_\theta, \quad (\text{II.3.1.68})$$

$$\overrightarrow{\Gamma}_{G/R} = \left[\frac{d\overrightarrow{V}_{G/R}}{dt} \right]_R, \quad (\text{II.3.1.69})$$

$$= -r_G \dot{\theta}^2 \overrightarrow{U}_\theta + r_G \ddot{\theta} \overrightarrow{V}_\theta. \quad (\text{II.3.1.70})$$

Les projections de ces vecteurs sur $\overrightarrow{U}_\theta$

$$\overrightarrow{\Gamma}_{G/R} \cdot \overrightarrow{U}_\theta = -r_G \dot{\theta}^2, \quad (\text{II.3.1.71})$$

$$V_{G/R} \cdot \overrightarrow{U}_\theta = 0, \quad (\text{II.3.1.72})$$

$$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{U}_\theta = r_G, \quad (\text{II.3.1.73})$$

et sur $\overrightarrow{V}_\theta$

$$\overrightarrow{\Gamma}_{G/R} \cdot \overrightarrow{V}_\theta = r_G \ddot{\theta}, \quad (\text{II.3.1.74})$$

$$V_{G/R} \cdot \overrightarrow{V}_\theta = r_G \dot{\theta}, \quad (\text{II.3.1.75})$$

$$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{V}_\theta = 0. \quad (\text{II.3.1.76})$$

– Calcul du moment dynamique et des caractéristiques cinétiques de B

Le moment dynamique du solide B au point O s'écrit

$$\overrightarrow{\delta}_O(B/R) = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}_O(B/R)}{dt} \right]_R + M \overrightarrow{V}_{O/R} \wedge \overrightarrow{V}_{G/R} \quad (\text{II.3.1.77})$$

où $\overrightarrow{\sigma_O(B/R)}$ est le moment cinétique au point O du solide B par rapport au référentiel galiléen R et s'écrit

$$\overrightarrow{\sigma_O(B/R)} = M\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{V_{O \in B/R}} + \mathcal{I}_{O,B}(\overrightarrow{\Omega_{(B/R)}}), \quad (\text{II.3.1.78})$$

et où $\mathcal{I}_{O,B}(\overrightarrow{\Omega_{(B/R)}})$ désigne l'opérateur d'inertie, défini comme suit

$$\mathcal{I}_{O,B}(\overrightarrow{\Omega_{(B/R)}}) = \int_{\forall M \in B} \overrightarrow{OM} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{(B/R)}} \wedge \overrightarrow{OM}) dm. \quad (\text{II.3.1.79})$$

Or $\overrightarrow{V_{O/R}} = \overrightarrow{V_{O \in B/R}} = \overrightarrow{0}$. Par conséquent,

$$\overrightarrow{\delta_O(\mathbb{B}/R)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_O(\mathbb{B}/R)}}{dt} \right]_R. \quad (\text{II.3.1.80})$$

$$\text{et } \overrightarrow{\sigma_O(\mathbb{B}/R)} = \mathcal{I}_{O,B}(\overrightarrow{\Omega_{(B/R)}}). \quad (\text{II.3.1.81})$$

L'opérateur d'inertie $\mathcal{I}_{O,B}()$ est associé à la matrice d'inertie notée $\begin{bmatrix} J_{O,B} \end{bmatrix}_{\mathbb{B}_\theta}$. D'après

le théorème de Huygens,

$$\begin{bmatrix} J_{O,B} \end{bmatrix}_{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} J_{G,B} \end{bmatrix}_{\mathbb{B}_\theta} + m \begin{bmatrix} (y_G^2 + z_G^2) & -x_G y_G & -x_G z_G \\ -x_G y_G & x_G^2 + z_G^2 & -y_G z_G \\ -x_G z_G & -y_G z_G & (x_G^2 + y_G^2) \end{bmatrix}_{\mathbb{B}_\theta}. \quad (\text{II.3.1.82})$$

où x_G, y_G et z_G sont les coordonnées du centre de gravité G du solide B dans le repère R_θ . Comme M est le centre d'inertie de B

$$\begin{bmatrix} J_{G,B} \end{bmatrix}_{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_B & 0 \\ 0 & 0 & C_B \end{bmatrix}_{\mathbb{B}}, \text{ où } B_B = C_B = \frac{m}{3} r_G^2 = m \frac{L^2}{12} \text{ dans le cas d'une barre homogène. Ainsi}$$

$$\begin{bmatrix} J_{O,B} \end{bmatrix}_{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} m r_G^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} m r_G^2 \end{bmatrix}_{\mathbb{B}_\theta}. \quad (\text{II.3.1.83})$$

Par conséquent,

$$\mathcal{J}_{O,B}(\overrightarrow{\Omega_{(B/R)}}) = \frac{4}{3}mr_G^2\dot{\theta}\vec{Z}. \quad (\text{II.3.1.84})$$

et on en déduit le moment cinétique

$$\overrightarrow{\sigma_0(B/R)} = \mathcal{J}_{O,B}(\overrightarrow{\Omega_{(B/R)}}), \quad (\text{II.3.1.85})$$

$$= \frac{4}{3}mr_G^2\dot{\theta}\vec{Z}. \quad (\text{II.3.1.86})$$

On en déduit facilement l'expression du moment dynamique recherché

$$\overrightarrow{\delta_O(B/R)} = \frac{4}{3}mr_G^2\ddot{\theta}\vec{Z}. \quad (\text{II.3.1.87})$$

2. Théorème de la résultante dynamique

Ce théorème traduit le fait que la somme des forces mécaniques extérieures à B , notées

$\overrightarrow{F_{\vec{B}^{(i)} \rightarrow B}}$, est égale à la résultante dynamique de ce solide :

$$\sum_i \overrightarrow{F_{\vec{B}^{(i)} \rightarrow B}} = M\overrightarrow{\Gamma_{G/R}}. \quad (\text{II.3.1.88})$$

Autrement dit, dans le cas présent,

$$\overrightarrow{F_{H \rightarrow B}} + \overrightarrow{F_{Grav \rightarrow B}} + \overrightarrow{F_{Mot \rightarrow B}} + \overrightarrow{F_{S_2 \rightarrow B}} + \overrightarrow{F_{S_0 \rightarrow B}} = m\overrightarrow{\Gamma_{G/R}}. \quad (\text{II.3.1.89})$$

Après projection suivant les vecteurs \vec{U}_θ et \vec{V}_θ

$$\tilde{H}_x - mg \sin \theta + \tilde{X}_{21} + \tilde{X}_{01} = -mr_G\dot{\theta}^2, \quad (\text{II.3.1.90})$$

$$\tilde{H}_y - mg \cos \theta + \tilde{Y}_{21} + \tilde{Y}_{01} = mr_G\ddot{\theta}, \quad (\text{II.3.1.91})$$

d'où on en déduit les inconnues de liaison

$$\tilde{X}_{01} = -mr_G\dot{\theta}^2 + M \left(g \sin \theta - l\dot{\theta}^2 + h(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) \cos \varphi - h(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \sin \varphi \right) + mg \sin \theta - \tilde{H}_x, \quad (\text{II.3.1.92})$$

$$\tilde{Y}_{01} = mr_G\ddot{\theta} + M \left(g \cos \theta + l\ddot{\theta} + h(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) \sin \varphi + h(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \cos \varphi \right) + mg \cos \theta - \tilde{H}_y. \quad (\text{II.3.1.93})$$

3. Théorème du moment dynamique

Ce théorème traduit le fait que la somme des moments mécaniques extérieures à B au

point O , notés $\overrightarrow{\mathcal{M}_O(\overline{B}^{(i)} \rightarrow B)}$, est égale au moment dynamique de ce solide au même point :

$$\sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_O(\overline{B}^{(i)} \rightarrow B)} = M \overrightarrow{\delta_O(B/R)}. \quad (\text{II.3.1.94})$$

Autrement dit,

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O(H \rightarrow B)} + \overrightarrow{\mathcal{M}_O(Grav \rightarrow B)} + \overrightarrow{\mathcal{M}_O(Mot \rightarrow B)} + \overrightarrow{\mathcal{M}_O(S_2 \rightarrow B)} + \overrightarrow{\mathcal{M}_O(S_0 \rightarrow B)} = \overrightarrow{\delta_O(B/R)}, \quad (\text{II.3.1.95})$$

où

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}_O(Grav \rightarrow B)} &= \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{F_{Grav \rightarrow B}} = -r_G m g \cos(\theta) \vec{Z}, \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_0(S_0 \rightarrow B)} &= C_{fO} \vec{Z}, \\ \text{et } \overrightarrow{\mathcal{M}_0(S_2 \rightarrow B)} &= (C_{fA} + l\tilde{Y}_{21}) \vec{Z}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation de mouvement issue de l'application de ce théorème, projeté sur l'axe (O, \vec{Z}) , s'écrit

$$L\tilde{H}_y - r_G m g \cos \theta + C_m + C_{fA} + l\tilde{Y}_{21} + C_{fo} = \frac{4}{3} m r_G^2 \ddot{\theta}. \quad (\text{II.3.1.96})$$

En posant $C_h = L\tilde{H}_y$, le couple exercé par l'homme, puis en remplaçant \tilde{Y}_{21} par son expression, il vient :

$$\begin{aligned} C_m + C_h &= \frac{4}{3} m r_G^2 \ddot{\theta} \\ &+ lM \left(g \cos \theta + l\ddot{\theta} + h(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) \sin \varphi + h(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 \cos \varphi \right) + r_G m g \cos \theta - C_{fA} - C_{fo}. \end{aligned} \quad (\text{II.3.1.97})$$

3.1.4 Résumé

Les équations de mouvement sont

$$Mhl \sin \varphi \ddot{\theta} + Mh^2 (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) - Mhl \cos \varphi \dot{\theta}^2 + Mhg \sin(\theta + \varphi) + C_{fA} = 0, \quad (\text{II.3.1.98})$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4}{3}mr_G^2 + Ml^2 \right) \ddot{\theta} + Mhl \sin \varphi (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) + Mhl \cos \varphi (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \\ & + (mr_G + Ml) g \cos \theta - C_{fA} - C_{fO} = C_m + C_h. \end{aligned} \quad (\text{II.3.1.99})$$

Les inconnues de liaison sont données par les relations

$$\tilde{X}_{01} = -mr_G \dot{\theta}^2 + M \left(g \sin \theta - l \dot{\theta}^2 + h (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) \cos \varphi - h (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \sin \varphi \right) + mg \sin \theta - \tilde{H}_x, \quad (\text{II.3.1.100})$$

$$\tilde{Y}_{01} = mr_G \ddot{\theta} + M \left(g \cos \theta + l \ddot{\theta} + h (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) \sin \varphi + h (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \cos \varphi \right) + mg \cos \theta - \tilde{H}_y, \quad (\text{II.3.1.101})$$

$$\tilde{X}_{21} = -M \left(g \sin \theta - l \dot{\theta}^2 + h (\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}) \cos \varphi - h (\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2 \sin \varphi \right), \quad (\text{II.3.1.102})$$

$$\tilde{Y}_{21} = -M \left(g \cos \theta + l \ddot{\theta} + h (\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}) \sin \varphi + h (\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2 \cos \varphi \right). \quad (\text{II.3.1.103})$$

3.2 Modélisation du robot à deux bras sans charge pendulaire par application du Principe Fondamental de la Dynamique

3.2.1 Notations & nomenclature

On considère le robot manipulateur à deux bras représenté par la Figure 3.3.

- Les articulations du robot, aux points O_1 et O_2 , sont supposées être des liaisons pivots d'axe \vec{Z} avec frottement. Le couple de frottement au point O_1 est noté $C_{f_{01}}$ et correspond à l'action du bâti S_0 sur la barre S_1 . Le couple de frottement au point O_2 est noté $C_{f_{02}}$ et correspond à l'action de la barre S_2 sur la barre S_1 .

3.2.2 Bilan des actions mécaniques extérieures

On commence tout d'abord par isoler la charge M .

- Le bras 1 est supposé rigide, homogène, de masse m_1 et est désigné par S_1 .
- Le bras 2 est supposé rigide, homogène, de masse m_2 et est désigné par S_2 .
- x_{G1} désigne le centre d'inertie du bras S_1 .
- x_{G2} désigne le centre d'inertie du bras S_2 .
- $\mathbb{B} = (\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ désigne une base fixe, attachée au bâti immobile S_0 , de sorte que $\{O, \mathbb{B}\}$ corresponde à un repère cartésien.
- $\mathbb{B}_1 = (\vec{U}_{\theta_1}, \vec{V}_{\theta_1}, \vec{Z})$ est la base tournante, repérée par l'angle θ_1 et attachée au solide S_1 .
- $\mathbb{B}_2 = (\vec{U}_{\theta_2}, \vec{V}_{\theta_2}, \vec{Z})$ est la base tournante, repérée par l'angle θ_2 et attachée au solide S_2 .
- $\vec{O_1O_2} = L_1 \vec{U}_{\theta_1}$
- $\vec{O_2P} = L_2 \vec{U}_{\theta_2}$

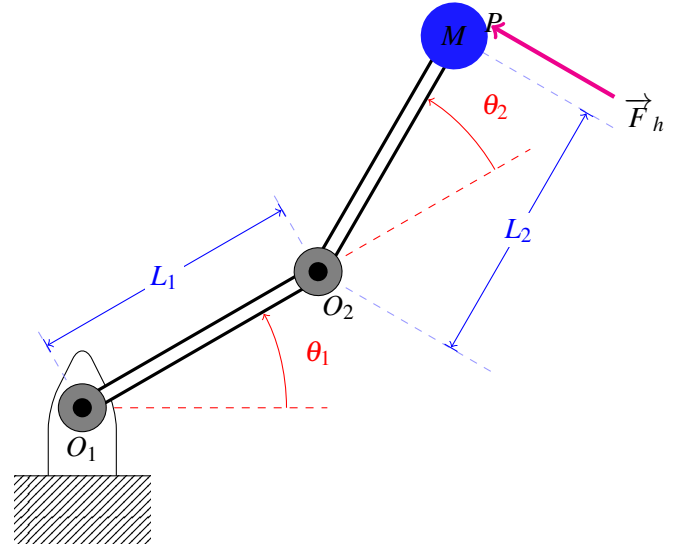


FIGURE 3.3 – Bras double.

- L'homme est en contact avec le robot au point P , d'où il est supposé appliquer une action mécanique, se traduisant par un couple C_h au point O .
- Le robot est équipé d'un moteur exerçant un couple C_{m1} au point O_1 et est désigné par mot_1 .
- Le robot est équipé d'un moteur exerçant un couple C_{m2} au point O_2 et est désigné par mot_2 .

3.2.2.1 Bilan des actions mécaniques appliqués à la charge M

1. Action appliquée par la barre 2 sur la masse :

$$\left\{ \begin{array}{c} S_M \rightarrow S_2 \end{array} \right\}_{P, \mathbb{B}_2} = - \left\{ \begin{array}{c} S_2 \rightarrow S_M \end{array} \right\}_{P, \mathbb{B}_2}$$

Ainsi

$$\left\{ \begin{array}{c} S_2 \rightarrow S_M \end{array} \right\}_{P, \mathbb{B}_2} = \left\{ \begin{array}{c|c} -\tilde{X}_{MB} & \dots \\ -\tilde{Y}_{MB} & \dots \\ \dots & 0 \end{array} \right\}_{P, \mathbb{B}_2} \quad (\text{II.3.2.104})$$

2. Action appliquée par la gravité sur la masse M :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Gravité} \rightarrow S_M \\ \end{array} \right\}_{P, \mathbb{B}_2} = \left\{ \begin{array}{c} -Mg \sin(\theta_1 + \theta_2) \vec{U}_{\theta_2} - Mg \cos \theta_1 + \theta_2 \vec{V}_{\theta_2} \\ \vec{PM} \wedge \vec{F}_M \\ \end{array} \right\}_{P, \mathbb{B}_2} \quad (\text{II.3.2.105})$$

Or on a :

$$\vec{PM} = 0. \quad (\text{II.3.2.106})$$

Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Gravité} \rightarrow S_M \\ \end{array} \right\}_{P, \mathbb{B}_2} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} -Mg \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -Mg \cos \theta_1 + \theta_2 \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ 0 \end{array} \end{array} \right\}_{P, \mathbb{B}_2}.$$

3.2.2.2 Bilan des actions mécaniques appliquées à la Barre 2

Les actions mécaniques appliquées à la barre 2 en O_2 dans la base \mathbb{B}_2 sont :

1. Action appliquée par la masse sur la barre 2 :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} S_M \rightarrow S_2 \\ \end{array} \right\}_{P, \mathbb{B}_2} &= - \left\{ \begin{array}{c} S_2 \rightarrow S_M \\ \end{array} \right\}_{P, \mathbb{B}_2} \\ &= \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \tilde{X}_{MB} \\ \tilde{Y}_{MB} \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ 0 \end{array} \end{array} \right\}_{P, \mathbb{B}_2} \\ &= \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \tilde{X}_{MB} \\ \tilde{Y}_{MB} \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ L_2 \tilde{Y}_{MB} \end{array} \end{array} \right\}_{O_2, \mathbb{B}_2} \end{aligned} \quad (\text{II.3.2.107})$$

2. Action appliquée par la barre1 sur la barre 2 :

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{c} S_1 \rightarrow S_2 \end{array} \right\}_{O_2, \mathbb{B}_2} &= - \left\{ \begin{array}{c} S_2 \rightarrow S_1 \end{array} \right\}_{O_2, \mathbb{B}_2} \\
 &= \left\{ \begin{array}{c|c} X_{12} & \dots \\ Y_{12} & \dots \\ \dots & -C_{f_{02}} \end{array} \right\}_{O_2, \mathbb{B}_2} .
 \end{aligned} \tag{II.3.2.108}$$

3. Action appliquée par l'homme sur la barre 2 :

En supposant que l'homme n'exerce pas de couple à la barre, il applique une force notée

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{F_{H \rightarrow S_2}} &:= H_x \vec{x} + H_y \vec{y} \\
 &:= \tilde{H}_x U_{\theta_2} + \tilde{H}_y V_{\theta_2}
 \end{aligned}$$

et un moment nul noté

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_p(H \rightarrow S_2)} := \vec{0}$$

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{c} \vec{H} \rightarrow S_2 \end{array} \right\}_{A, \mathbb{B}_2} &= \left\{ \begin{array}{c|c} \tilde{H}_x & \dots \\ \tilde{H}_y & \dots \\ \dots & 0 \end{array} \right\}_{P, \mathbb{B}_2} \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} \tilde{H}_x \vec{u}_{\theta_2} + \tilde{H}_y \vec{v}_{\theta_2} \\ \overrightarrow{O_2 P} \wedge (\tilde{H}_x \vec{u}_{\theta_2} + \tilde{H}_y \vec{v}_{\theta_2}) \end{array} \right\}_{O_2, \mathbb{B}_2} \\
 &= \left\{ \begin{array}{c|c} \tilde{H}_x & \dots \\ \tilde{H}_y & \dots \\ \dots & L_2 \tilde{H}_y \end{array} \right\}_{O_2, \mathbb{B}_2} .
 \end{aligned} \tag{II.3.2.109}$$

Car :

(II.3.2.110)

$$\overrightarrow{O_2 P} = L_2 \overrightarrow{u_{\theta_2}}.$$

4. Action appliquée par le moteur sur la barre 2 :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{mot}_2 \rightarrow S_2 \end{array} \right\}_{O_2, \mathbb{B}_2} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & \dots \\ 0 & \dots \\ \dots & C_{m2} \end{array} \right\}_{O_2, \mathbb{B}_2} . \quad (\text{II.3.2.111})$$

5. Action appliquée par la gravité sur la barre 2 :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \text{gravité} \rightarrow S_2 \end{array} \right\}_{G_2, \mathbb{B}} &= \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & \dots \\ -m_2 g & \dots \\ \dots & 0 \end{array} \right\}_{G_2, \mathbb{B}} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} -m_2 g \overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge -m_2 g \overrightarrow{y} \end{array} \right\}_{O_2, \mathbb{B}_2} \\ &= \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & \dots \\ -m_2 g & \dots \\ \dots & -m_2 g x_{G_2} \cos \theta_1 + \theta_2 \end{array} \right\}_{O_2, \mathbb{B}} \\ &= \left\{ \begin{array}{c|c} -m_2 g \sin \theta_1 + \theta_2 & \dots \\ -m_2 g \cos \theta_1 + \theta_2 & \dots \\ \dots & -m_2 g x_{G_2} \cos \theta_1 + \theta_2 \end{array} \right\}_{O_2, \mathbb{B}_2} . \end{aligned} \quad (\text{II.3.2.112})$$

3.2.2.3 Bilan des actions mécaniques appliquées sur la Barre 1

1. Action appliquée par la barre 2 sur la barre 1 :

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{c} S_2 \rightarrow S_1 \end{array} \right\}_{O_2, \mathbb{B}_2} &= - \left\{ \begin{array}{c} S_1 \rightarrow S_2 \end{array} \right\}_{O_2, \mathbb{B}_2} \\
 &= \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} -X_{12} \\ -Y_{12} \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ C_{fo2} \end{array} \end{array} \right\}_{O_2, \mathbb{B}_2} \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} -X_{12} \vec{u}_{\theta_2} - Y_{12} \vec{v}_{\theta_2} \\ C_{fo2} + \overrightarrow{O_1 O_2} \wedge (-X_{12} \vec{u}_{\theta_2} - Y_{12} \vec{v}_{\theta_2}) \end{array} \right\}_{O_1, \mathbb{B}_2} \quad (\text{II.3.2.113}) \\
 &= \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} -X_{12} \\ -Y_{12} \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ -L_1 X_{12} \sin \theta_2 - L_1 Y_{12} \cos \theta_2 + C_{fo2} \end{array} \end{array} \right\}_{O_1, \mathbb{B}_2} .
 \end{aligned}$$

2. Action appliquée par la gravité sur la barre 1 :

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{c} \text{gravité} \rightarrow S_1 \\ \end{array} \right\}_{G_1, \mathbb{B}} &= \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & \dots \\ -m_1 g & \dots \\ \dots & 0 \end{array} \right\}_{G_1, \mathbb{B}} \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g \\ \overrightarrow{O_1 G_1} \wedge -m_1 g \overrightarrow{y} \end{array} \right\}_{O_1, \mathbb{B}} \\
 &= \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & \dots \\ -m_1 g & \dots \\ \dots & -m_1 g x_{G1} \cos \theta_1 \end{array} \right\}_{O_1, \mathbb{B}} \quad (\text{II.3.2.114}) \\
 &= \left\{ \begin{array}{c|c} -m_1 g \sin \theta_1 & \dots \\ -m_1 g \cos \theta_1 & \dots \\ \dots & -m_1 g x_{G1} \cos \theta_1 \end{array} \right\}_{O_1, \mathbb{B}_2} .
 \end{aligned}$$

3. Action appliquée par le moteur sur la barre 1 :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{mot}_1 \rightarrow S_1 \\ \end{array} \right\}_{O_1, \mathbb{B}_2} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & \dots \\ 0 & \dots \\ \dots & C_{m1} \end{array} \right\}_{O_1, \mathbb{B}_2} . \quad (\text{II.3.2.115})$$

4. Action appliquée par le bâti sur la barre 1 :

$$\left\{ \begin{array}{c} S_0 \rightarrow S_1 \\ \end{array} \right\}_{O_1, \mathbb{B}_2} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{01} & \dots \\ Y_{01} & \dots \\ \dots & C_{fo1} \end{array} \right\}_{O_1, \mathbb{B}_2} . \quad (\text{II.3.2.116})$$

3.2.3 Principe Fondamentale de la dynamique :

3.2.3.1 Principe Fondamentale de la dynamique appliqué à la masse M

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{c} S_2 \rightarrow S_M \\ P, \mathbb{B}_2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{Gravité} \rightarrow S_M \\ P, \mathbb{B}_2 \end{array} \right\} &= \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{D}(P, M/R) \\ P, \mathbb{B}_2 \end{array} \right\}}_{\text{TorseurDynamique}} \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{M\Gamma_{M/R}} \\ \overrightarrow{\delta_P(M/R)} \\ P, \mathbb{B}_2 \end{array} \right\}.
 \end{aligned} \tag{II.3.2.117}$$

3.2.3.1.1 Théorème de la résultante dynamique

Calcul de l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{M/R}}$:

$$\overrightarrow{\Gamma_{M/R}} = \left[\begin{array}{c} \frac{d\overrightarrow{V_{M/R}}}{dt} \\ \end{array} \right]_R. \tag{II.3.2.118}$$

Comme on a :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{V_{M/R}} &= L_1 \dot{\theta}_1 \overrightarrow{v_{\theta_1}} + L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \overrightarrow{v_{\theta_2}}. \\
 \overrightarrow{\Gamma_{M/R}} &= L_1 \ddot{\theta}_1 \overrightarrow{v_{\theta_1}} - L_1 \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{u_{\theta_1}} + L_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \overrightarrow{v_{\theta_2}} - L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \overrightarrow{u_{\theta_2}}
 \end{aligned}$$

suivant $\overrightarrow{u_{\theta_2}}$:

$$-\tilde{X}_{MB} = Mg \sin \theta_1 + \theta_2 + ML_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - ML_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_2 - ML_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

Ainsi

$$\tilde{X}_{MB} = -ML_1 \sin \theta_2 \ddot{\theta}_1 - Mg \sin \theta_1 + \theta_2 + ML_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + ML_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2. \quad (\text{II.3.2.119})$$

suivant \vec{v}_{θ_2} :

$$-\tilde{Y}_{MB} = Mg \cos \theta_1 + \theta_2 + ML_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + ML_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + ML_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2).$$

Ainsi

$$\tilde{Y}_{MB} = (-ML_1 \cos \theta_2 - ML_2) \ddot{\theta}_1 - Ml \ddot{\theta}_2 - Mg \cos \theta_1 + \theta_2 - ML_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2. \quad (\text{II.3.2.120})$$

3.2.3.2 Principe fondamentale de la dynamique appliqué à la barre 2

$$\underbrace{\left\{ \mathcal{D}(A, M/R) \right\}}_{\text{Torseur Dynamique}}_{O_2, \mathbb{B}_2} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} m_2 \vec{\Gamma}_{G_2/R} \\ \vec{\delta}_{O_2, \mathbb{B}_2/R} \end{array} \right\}}_{O_2, \mathbb{B}_2}. \quad (\text{II.3.2.121})$$

avec

$$\vec{V}_{G_2/R} = L_1 \dot{\theta}_1 \vec{v}_{\theta_1} + x_{G_2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{v}_{\theta_2}. \quad (\text{II.3.2.122})$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{G_2/R} &= L_1 \ddot{\theta}_1 \vec{v}_{\theta_1} - L_1 \dot{\theta}_1^2 \vec{u}_{\theta_1} + x_{G_2} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \vec{v}_{\theta_2} - x_{G_2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \vec{u}_{\theta_2} \\ \vec{\delta}_{O_2, \mathbb{B}_2/R} &= \frac{d}{dt} \left[\vec{\sigma}_{O_2(\mathbb{B}_2/R)} \right]_R + m_2 \vec{V}(O_2/R) \wedge \vec{V}(G_2/R). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} m_2 \vec{V}(O_2/R) \wedge \vec{V}(G_2/R) &= m_2 (L_1 \dot{\theta}_1 \vec{v}_{\theta_1} \wedge (L_1 \dot{\theta}_1 \vec{v}_{\theta_1} + x_{G_2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{v}_{\theta_2})) \\ &= m_2 L_1 \dot{\theta}_1 x_{G_2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 \vec{Z}. \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(O_2, \mathbb{B}_2/R) &= m_2 \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge \vec{V}(O_2, \mathbb{B}_2/R) + \mathbf{J}(O_2, \mathbb{B}_2)(\vec{\Omega}(\mathbb{B}_2/R)), \\ \vec{\Omega}(\mathbb{B}_2/R) &= \vec{\Omega}(\mathbb{B}_2/\mathbb{B}_1) + \vec{\Omega}(\mathbb{B}_1/R_g) \\ &= (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{Z}, \\ (\mathbf{J}_{O_2})_{\mathbb{B}_2} &= (\mathbf{J}_{G_2})_{\mathbb{B}} + \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & m_2 x_{G_2}^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & m_2 x_{G_2}^2 \end{array} \right)_{\mathbb{B}_2}. \end{aligned} \quad (\text{II.3.2.123})$$

Or

$$(\mathbf{J}_{G_2})_{\mathbb{B}_2} = \left(\begin{array}{c|c|c} A & 0 & 0 \\ \hline 0 & B & 0 \\ \hline 0 & 0 & C \end{array} \right)_{G_2, \mathbb{B}_2}.$$

Ainsi

$$(\mathbf{J}_{O_2})_{\mathbb{B}_2} = \left(\begin{array}{c|c|c} A & 0 & 0 \\ \hline 0 & B + m_2 x_{G_2}^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & C + m_2 x_{G_2}^2 \end{array} \right)_{\mathbb{B}_2}. \quad (\text{II.3.2.124})$$

Ce qui donne

$$J_{O_2, \mathbb{B}_2}(\vec{\Omega}(\mathbb{B}_2/R)) = (C + m_2 x_{G_2}^2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{Z}.$$

d'autre part

$$\overrightarrow{O_2 G_2} \wedge \vec{V}(O_2 \in \mathbb{B}_2/R) = x_{G_2} L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \vec{Z}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{O_2, \mathbb{B}_2/R} &= [m_2 \vec{x}_{G_2} L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + (C + m_2 x_{G_2}^2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)] \vec{Z} \\ \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(O_2, \mathbb{B}_2/R) \right]_R &= [m_2 \vec{x}_{G_2} L_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 - m_2 \vec{x}_{G_2} L_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + (C + m_2 x_{G_2}^2)(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)] \vec{Z}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne l'expression de :

$$\vec{\delta}_{O_2, \mathbb{B}_2/R} = [m_2 L_1 \dot{\theta}_1^2 x_{G_2} \sin \theta_2 + m_2 x_{G_2} L_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + (C + m_2 x_{G_2}^2)(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)] \vec{Z}. \quad (\text{II.3.2.125})$$

3.2.3.2.1 Théorème de la résultante dynamique

suivant \vec{u}_{θ_2} :

$$X_{12} + \tilde{H}_x - m_2 g \sin \theta_1 + \theta_2 + \tilde{X}_{MB} = m_2 \left(L_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - L_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_2 - x_{G_2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \right).$$

Ainsi

$$X_{12} = (m_2 + M)L_1 \sin \theta_2 \ddot{\theta}_1 - (m_2 L_1 + ML_1) \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_2 - (m_2 x_{G2} + ML_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 - \tilde{H}_x + (m_2 + M)g \sin \theta_1 + \theta_2. \quad (\text{II.3.2.126})$$

$$\text{si } x_{G2} = \frac{L_2}{2}$$

$$X_{12} = (m_2 + M)L_1 \sin \theta_2 \ddot{\theta}_1 - (m_2 L_1 - ML_1) \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_2 - \left(\frac{m_2 L_2}{2} + ML_2\right)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 - \tilde{H}_x + (m_2 + M)g \sin \theta_1 + \theta_2. \quad (\text{II.3.2.127})$$

suivant \vec{v}_{θ_2} :

$$Y_{12} + \tilde{H}_y - m_2 g \cos \theta_1 + \theta_2 + \tilde{Y}_{MB} = m_2 \left[L_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + x_{G2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \right].$$

Ainsi

$$Y_{12} = \left[(m_2 + M)L_1 \cos \theta_2 + m_2 x_{G2} + ML_2 \right] \ddot{\theta}_1 + (m_2 x_{G2} + ML_2) \ddot{\theta}_2 + (m_2 L_1 + ML_1) \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 - \tilde{H}_y + (m_2 + M)g \cos \theta_1 + \theta_2. \quad (\text{II.3.2.128})$$

$$\text{si } x_{G2} = \frac{L_2}{2}$$

$$Y_{12} = \left[(m_2 + M)L_1 \cos \theta_2 + m_2 \frac{L_2}{2} + ML \right] \ddot{\theta}_1 + \left[\frac{m_2 L_2}{2} + ML_2 \right] \ddot{\theta}_2 + (m_2 L_1 + ML_1) \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 - \tilde{H}_y + (m_2 + M)g \cos \theta_1 + \theta_2. \quad (\text{II.3.2.129})$$

3.2.3.2.2 Théorème du moment dynamique

$$\begin{aligned}
 L_2 \ddot{H}_y + c_{m_2} - m_2 g x_{G_2} \cos \theta_1 + \theta_2 + L_2 \ddot{Y}_{MB} - C_{f_{02}} &= m_2 L_1 x_{G_2} \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + m_2 x_{G_2} L_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 \\
 &+ (C + m_2 x_{G_2}^2)(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2).
 \end{aligned}
 \tag{II.3.2.130}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 &\left[-ML_2 L_1 \cos \theta_2 - ML_2^2 - m_2 x_{G_2} L_1 \cos \theta_2 - (c + m_2 x_{G_2}^2) \right] \ddot{\theta}_1 + \left[-ML_2^2 - (c + m_2 x_{G_2}^2) \right] \ddot{\theta}_2 \\
 &= -L_2 \ddot{H}_y - c_{m_2} + g \cos \theta_1 + \theta_2 (m_2 x_{G_2} + L_2 M) + (ML_2 + m_2 x_{G_2}) L_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + C_{f_{02}}.
 \end{aligned}
 \tag{II.3.2.131}$$

.

3.2.3.3 Principe Fondamentale de la dynamique sur la barre 1

$$\underbrace{\left\{ \mathfrak{D}(O_1, \mathbb{B}_1/R) \right\}}_{\text{TorseurDynamique}}_{O_1, \mathbb{B}_2} = \left\{ \begin{array}{c} m_1 \vec{\Gamma}_{G_1/R} \\ \vec{\delta}_{O_1}(Barre1/R) \end{array} \right\}_{O_1, \mathbb{B}_2}.
 \tag{II.3.2.132}$$

Or

$$\vec{\Gamma}_{G_1/R} = \left[\frac{d\vec{V}_{G_1/R}}{dt} \right]_R,$$

avec

$$\vec{V}_{G_1/R} = x_{G_1} \dot{\theta}_1 \vec{v}_{\theta_1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{G_1/R} &= x_{G_1} \ddot{\theta}_1 \vec{v}_{\theta_1} - x_{G_1} \dot{\theta}_1^2 \vec{u}_{\theta_1}, \\ \vec{\delta}_{O_2(\mathbb{B}_1/R)} &= \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{O_1(\mathbb{B}_1/R)}]_R + \underbrace{m_1 \vec{V}(O_1/R) \wedge \vec{V}(G_1/R)}_{\vec{0} \text{ car } \vec{V}(O_1/R) = \vec{0}}, \\ \vec{\sigma}_{O_1(\text{Barre1}/R)} &= m_1 \underbrace{\vec{O_1 G_1} \wedge \vec{V}(O_1 \in \mathbb{B}_1/R)}_{\vec{0}} + \mathbf{J}_{O_1, \mathbb{B}_1}(\vec{\Omega}_{\mathbb{B}_1/R}). \end{aligned} \quad (\text{II.3.2.133})$$

Comme

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbb{B}_1/R) &= \dot{\theta}_1 \vec{Z}. \\ \mathbf{J}_{O_1, \mathbb{B}_1} &= \mathbf{J}(G_1, \mathbb{B}_1) + \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & m_1 x_{G_1}^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & m_1 x_{G_1}^2 \end{array} \right)_{\mathbb{B}_1} \\ &= \left(\begin{array}{c|c|c} A_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & B_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_2 \end{array} \right)_{\mathbb{B}_1} + \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & m_1 x_{G_1}^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & m_1 x_{G_1}^2 \end{array} \right)_{\mathbb{B}_1} \\ &= \left(\begin{array}{c|c|c} A_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & B_2 + m_1 x_{G_1}^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_2 + m_1 x_{G_1}^2 \end{array} \right)_{\mathbb{B}_1}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(O_1, \mathbb{B}_1/R) &= (C_2 + m_1 x_{G_1}^2) \dot{\theta}_1 \vec{Z}. \\ \vec{\delta}(O_2, \mathbb{B}_1/R) &= (C_2 + m_1 x_{G_1}^2) \ddot{\theta}_1 \vec{Z}. \end{aligned} \quad (\text{II.3.2.134})$$

3.2.3.3.1 Théorème de la résultante dynamique

suivant \vec{u}_{θ_2} :

$$\begin{aligned} -X_{12} + X_{01} - m_1 g \sin \theta_1 + \theta_2 &= m_1 (x_{G_1} \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - x_{G_1} \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_2). \\ X_{01} &= m_1 (x_{G_1} \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - x_{G_1} \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_2 + g \sin \theta_1 + \theta_2) + X_{12}. \end{aligned} \quad (\text{II.3.2.135})$$

suivant \vec{v}_{θ_2} :

$$\begin{aligned} -Y_{12} - m_1 g \cos(\theta_1 + \theta_2) + Y_{01} &= m_1 [x_{G_1} \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + x_{G_1} \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2]. \\ Y_{01} &= m_1 [x_{G_1} \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + x_{G_1} \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + g \cos \theta_1 + \theta_2] + Y_{12}. \end{aligned} \quad (\text{II.3.2.136})$$

3.2.3.3.2 Théorème du moment dynamique

$$(c_2 + m_1 x_{G_1}^2) \ddot{\theta}_1 = -L_1 X_{12} \sin \theta_2 - L_1 Y_{12} \cos \theta_2 - m_1 g x_{G_1} \cos \theta_1 + C_{m1} + C_{f_{o1}} + C_{f_{o2}}. \quad (\text{II.3.2.137})$$

Ainsi

$$\begin{aligned} &[(c_2 + m_1 x_{G_1}^2) + (m_2 + M)L_1^2 + (m_2 L_1 x_{G_2} + M L_2 L_1) \cos \theta_2] \ddot{\theta}_1 + (m_2 L_1 x_{G_2} + M L_2 L_1) \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 \\ &= (m_2 L_1 x_{G_2} + M L_2 L_1) \sin \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1)^2 + C_{m1} - m_1 x_{G_1} g \cos \theta_1 + L_1 \cos \theta_2 \tilde{H}_y + L_1 \sin \theta_2 \tilde{H}_x \\ &\quad + C_{f_{o1}} + C_{f_{o2}} - (m_2 + M) g L_1 \cos \theta_1. \end{aligned} \quad (\text{II.3.2.138})$$

3.2.4 Modélisation

L'équation du mouvement du système dans l'espace des articulations peut s'exprimer sous forme matricielle comme suit :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = U. \quad (\text{II.3.2.139})$$

où

$$q := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_1 + \theta_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{II.3.2.140})$$

$$U := \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_2 \tilde{H}_y + L_1 \sin \theta_2 \tilde{H}_x + C_{m1} \\ L_2 \tilde{H}_y + C_{m2} \end{bmatrix}. \quad (\text{II.3.2.141})$$

$$= \begin{bmatrix} C_{m1} \\ C_{m2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \sin \theta_2 & L_1 \cos \theta_2 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{bmatrix}$$

$$M(q) := \begin{bmatrix} m_1 \frac{L_1^2}{3} + (m_2 + M)L_1^2 & (m_2 \frac{L_1 L_2}{2} + ML_2 L_1) \cos \theta_2 \\ (m_2 \frac{L_1 L_2}{2} + ML_2 L_1) \cos \theta_2 & ML_2^2 + m_2 \frac{L_2^2}{3} \end{bmatrix}. \quad (\text{II.3.2.142})$$

$$C(q, \dot{q}) := \begin{bmatrix} 0 & -(m_2 \frac{L_1 L_2}{2} + ML_2 L_1) \sin \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ (ML_2 + \frac{m_2 L_2}{2}) L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{II.3.2.143})$$

$$g(q) := \begin{bmatrix} m_1 g x_{G1} \cos \theta_1 + (m_2 + M) g L_1 \cos \theta_1 \\ (m_2 x_{G2} + ML_2) g \cos \theta_1 + \theta_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{II.3.2.144})$$

La matrice de masse $M(q)$ est symétrique définie positive.

Remarque 4. En présence de frottement on peut écrire le système comme suit :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = U + W_f$$

Avec

$$W_f = \begin{bmatrix} C_{fo1} + C_{fo2} \\ -C_{fo2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.2.145})$$

3.2.5 Résumé

Les équations de mouvement sont :

$$\begin{aligned} & [(c_2 + m_1 x_{G_1}^2) + (m_2 + M)L_1^2 + (m_2 L_1 x_{G_2} + ML_2 L_1) \cos \theta_2] \ddot{\theta}_1 + (m_2 L_1 x_{G_2} + ML_2 L_1) \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 \\ & = (m_2 L_1 x_{G_2} + ML_2 L_1) \sin \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + C_{m1} - m_1 x_{G1} g \cos \theta_1 + L_1 \cos \theta_2 \tilde{H}_y + L_1 \sin \theta_2 \tilde{H}_x \\ & \quad + C_{f01} + C_{f02} - (m_2 + M)g L_1 \cos \theta_1. \end{aligned} \quad (\text{II.3.2.146})$$

$$\begin{aligned} & \left[-ML_2 L_1 \cos \theta_2 - ML_2^2 - m_2 x_{G2} L_1 \cos \theta_2 - (c + m_2 x_{G2}^2) \right] \ddot{\theta}_1 + \left[-ML_2^2 - (c + m_2 x_{G2}^2) \right] \ddot{\theta}_2 \\ & = -L_2 \tilde{H}_y - c_{m2} + g \cos \theta_1 + \theta_2 (m_2 x_{G2} + L_2 M) + (ML_2 + m_2 x_{G2}) L_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + C_{f02}. \end{aligned} \quad (\text{II.3.2.147})$$

Les inconnues de liaison sont données par les relations

$$\tilde{X}_{MB} = -ML_1 \sin \theta_2 \ddot{\theta}_1 - Mg \sin \theta_1 + \theta_2 + ML_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + ML_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2. \quad (\text{II.3.2.148})$$

$$\tilde{Y}_{MB} = (-ML_1 \cos \theta_2 - ML_2) \ddot{\theta}_1 - Ml \ddot{\theta}_2 - Mg \cos \theta_1 + \theta_2 - ML_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2. \quad (\text{II.3.2.149})$$

$$\begin{aligned} X_{12} & = (m_2 + M)L_1 \sin \theta_2 \ddot{\theta}_1 - (m_2 L_1 + ML_1) \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_2 - (m_2 x_{G2} + ML_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ & \quad - \tilde{H}_x + (m_2 + M)g \sin \theta_1 + \theta_2. \end{aligned} \quad (\text{II.3.2.150})$$

$$\begin{aligned} Y_{12} & = \left[(m_2 + M)L_1 \cos \theta_2 + m_2 x_{G2} + ML_2 \right] \ddot{\theta}_1 + (m_2 x_{G2} + ML_2) \ddot{\theta}_2 + (m_2 L_1 + ML_1) \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 \\ & \quad - \tilde{H}_y + (m_2 + M)g \cos \theta_1 + \theta_2. \end{aligned} \quad (\text{II.3.2.151})$$

$$X_{01} = m_1 (x_{G1} \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - x_{G1} \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_2 + g \sin \theta_1 + \theta_2) + X_{12}. \quad (\text{II.3.2.152})$$

$$Y_{01} = m_1 [x_{G1} \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + x_{G1} \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + g \cos \theta_1 + \theta_2] + Y_{12}. \quad (\text{II.3.2.153})$$

Troisième partie

Co-manipulation homme-robot pour des tâches de manutention

Chapitre 1

Point de vue sur la co-manipulation

Sommaire

2.1 Introduction	115
2.1.1 Classification des trajectoires	115
2.1.2 La génération de trajectoire : état de l'art	118
2.2 Un générateur de trajectoire en ligne contrôlé par événement	120
2.2.1 Traitement de l'intensité de la force appliqué par l'opérateur	120
2.2.2 Profil de vitesse à Jerk minimal	122
2.2.3 Traitement de la direction de la force appliquée par l'opérateur	123
2.2.4 Algorithme récursif	124

1.1 Les exigences de co-manipulation : compromis

Ce travail de thèse porte sur la co-manipulation homme robot pour les tâches de manutention de charges lourdes caractérisées par un mouvement avec des vitesses modérées. Un champ d'application potentiel des stratégies proposées dans ce travail est l'industrie de fabrication tel que l'industrie de la construction et de montage où la manutention exige des efforts considérables. L'objectif principal est de réduire les efforts fournis par l'opérateur, en diminuant le temps consommé et les coûts de ces activités. On suppose que l'opérateur est en contact direct avec l'extrémité du robot. Un capteur de force mesure la force d'interaction et donne ses coordonnées correspondante le long de chaque direction dans le repère de l'effecteur. Sa localisation doit être choisie en fonction de la nature de la tâche de co-manipulation ainsi que l'architecture du robot. Le problème de co-manipulation traité ici consiste à permettre à l'opérateur de manipuler le

robot en toute sécurité, depuis son extrémité, en l'amenant à la position qu'il désire sans avoir à exercer la force nécessaire pour déplacer la charge pendulaire, ni même à ressentir de façon significative la dynamique du robot. Autrement dit, le robot doit assister l'opérateur en effort sans entraver la trajectoire qu'il souhaite emprunter pour déplacer l'objet. Cela se résume par les trois principales spécifications suivantes :

1. **Assistance** : l'opérateur conduit l'extrémité du robot pendant que ce dernier actionne ses moteurs afin de fournir l'effort nécessaire pour déplacer l'objet manipulé, tout en confortant sa position de sorte que son extrémité suive la trajectoire que lui impose l'opérateur.
2. **Transparence** : Pendant l'interaction homme robot, le mouvement coopératif résultant ne doit pas restreindre en aucun cas la volonté de l'opérateur pour déplacer le robot comme il le voudrait. Ainsi, l'opérateur ne doit pas percevoir de manière significative la présence du robot en fonctionnement (efforts résistants dus à son inertie, aux frottements, *etc.*).
3. **Sécurité** : lors d'une interaction physique entre un opérateur et un robot, la sécurité est d'une importance cruciale en raison du risque potentiel que peut provoquer un robot relativement puissant. Le robot ne doit en aucun cas représenter un danger pour l'opérateur humain. Du point de vue du contrôle, il est possible d'augmenter ce niveau de sécurité en garantissant que le robot ne pourra jamais présenter de comportements inacceptables tels qu'instabilité, mouvement trop rapide, *etc.*

Le niveau d'importance de chaque exigence dépend de l'objectif attendu de la co-manipulation. Dans le cas de tâches de manutention de charges lourdes, assurer un maximum de transparence peut causer un grave danger pour l'opérateur. Ainsi, un compromis entre la transparence et la sécurité semble nécessaire.

Dans ce travail de thèse, on a choisit que ce compromis soit en faveur de la sécurité. Notre interprétation de l'exigence de transparence se traduit par des objectifs de commande pour lesquels la vitesse du point d'interaction doit rester le maximum possible colinéaire à la force exercée par l'opérateur humain et doit en être proportionnelle à l'intensité de cette force. Notons qu'exercer une force est le seul moyen qu'a l'opérateur humain pour transmettre au robot l'information contenant intrinsèquement la direction désirée de déplacement et cette direction est donnée à chaque instant par le vecteur vitesse. Par conséquent, la force mesurée devrait servir dans la génération d'une trajectoire pour la vitesse de l'organe terminal. Ce dernier doit suivre cette trajectoire. Par ailleurs, la trajectoire à suivre doit être générée en ligne par un traitement approprié en temps réel de ces informations. Pour faire face aux exigences de sécurité, l'énergie cinétique emmagasinée par le robot pendant le mouvement doit être limitée en imposant, soit

un profil, soit un gabarit à la trajectoire désirée pour la vitesse de l'organe terminal. Imposer un gabarit consiste essentiellement à imposer une borne supérieure à l'amplitude de cette vitesse. Cependant dans notre cas, cela nécessite aussi d'imposer une borne supérieure à ses dérivées successives afin de filtrer les tremblements introduits par la force exercée. D'autre part, le choix d'un profil, qui consiste à utiliser des fonctions paramétrées, est plus facile à mettre en œuvre dans un générateur de trajectoire en ligne et permet de faire face au problème de tremblements. Cette dernière approche sera donc adoptée dans la suite. L'exigence d'assistance sera satisfaite une fois la génération de trajectoire et son suivi seront correctement accomplis. Ainsi, la génération et le suivi de trajectoire représentent les principaux défis qui seront abordés par la suite, un problème global qui peut être formulé comme un problème de contrôle optimal contraint.

1.2 La co-manipulation comme un problème de commande optimale

1.2.1 Notations

Dans la partie II on a vu que les relations générales entre les coordonnées articulaires et les coordonnées opérationnelles sont donnés par

$$X = f(q), \quad (\text{III.1.2.1})$$

$$\vec{X} = J(q)\dot{q}, \quad (\text{III.1.2.2})$$

$$\vec{\ddot{X}} = J\ddot{q} + \dot{J}\dot{q}. \quad (\text{III.1.2.3})$$

L'architecture mécanique des robots considérés dans cette thèse est celle d'un Robot Manipulateur Poly-Articulé (RMPA) du type RRR (*cf.* [18]) tel que le modèle ABB IRB1400, c'est-à-dire que chaque articulation (ou *axe*) réalise une liaison pivot entre les deux bras qui lui sont reliés. L'équation de mouvement d'un robot à n DDLs est donnée par

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau + \tau_h + W_f, \quad (\text{III.1.2.4})$$

où $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ et $\ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ correspondent respectivement aux vecteurs des vitesses et des accélérations. Le vecteur $\tau \in \mathbb{R}^n$ correspond aux couples moteur appliqués aux DDLs. Le vecteur des couples dus aux interactions home-robot est noté par τ_h . La matrice des termes d'inertie est donnée par

$M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$, $C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur contenant les forces centrifuges et de Coriolis, $g(q) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de forces dues à la gravité et $W_f \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de frottement.

Désignons par \vec{F}_h le vecteur de force d'interaction exercé par l'opérateur humain au niveau de l'organe terminal. Ce vecteur de force est caractérisé par sa norme Euclidienne notée $F_h (= \|\vec{F}_h\|)$ et par son orientation, définie par le vecteur unitaire, noté \vec{U}_{θ_h} , où θ_h est l'angle formé entre la force d'interaction \vec{F}_h et le vecteur unitaire du repère fixe. Notons par \vec{V}_{θ_h} le vecteur unitaire, orthogonal et positivement orienté à \vec{U}_{θ_h} .

1.2.2 Formulation du problème de co-manipulation

Le problème de co-manipulation traité dans cette thèse est considéré comme l'accomplissement d'une relation de type maître-à-esclave, pour qui l'opérateur humain lors de son interaction physique avec le robot décide quand et comment ce dernier doit bouger. Dans ce travail, nous considérons que la mesure de la force appliquée par l'opérateur humain permet d'extraire seulement la direction de déplacement que le robot devra suivre. Cependant, la force devant être appliquée par les actionneurs du robot, afin d'accomplir la tâche de co-manipulation, est fourni par une structure de commande assurant la réalisation du suivi de trajectoire. Cette trajectoire devrait alors être générée en ligne en fonction de la volonté de l'opérateur humain et demeure sous son autorité. En outre, par souci de sécurité, nous considérons que la vitesse de déplacement ne doit pas dépendre entièrement de la volonté de l'opérateur humain, mais devra être conforme à un modèle de vitesse donnée. La stratégie proposée, expliquée et justifiée dans le présent document, peut être considérée comme un objectif de contrôle basé sur l'amplification de puissance plutôt que l'amplification de la force décrite dans la Section 2.2.3.

Nos objectifs de commande sont basés sur le concept clé, décrit dans la Section précédente, que la vitesse du point d'interaction devrait rester colinéaire à chaque instant à la force exercée par l'opérateur humain tout en étant d'amplitude modérée. Maintenir le maximum possible la colinéarité entre la vitesse de l'effecteur et la force d'interaction tout en ayant le même sens, devrait concourir à la réalisation d'une partie de l'exigence de transparence, tandis que le choix d'une vitesse d'amplitude modérée permet de répondre en partie à celle de la sécurité.

Ce travail de thèse se distingue des différent travaux traitant le problème de co-manipulation. La principale différence réside dans la formulation de l'objectif de commande. En effet, grâce à une bonne analyse des exigences souhaitées pour la tâche de co-manipulation, on a synthétisé

une interaction efficace entre un homme et un robot par la résolution du problème de commande optimale contraint suivant :

$$\min_{\tau, q, \dot{q}, F_h} ||F_h|| - F_s \text{ avec } \vec{X} = J(q)\vec{q},$$

sous les contraintes de l'équation du mouvement (III.1.2.4) et

$$\|\vec{X} \times \vec{F}\| = 0, \quad (\text{III.1.2.5a})$$

$$\langle \vec{X}_d | \vec{F}_h \rangle > 0, \quad (\text{III.1.2.5b})$$

$$\|\vec{X}\| \leq V_0. \quad (\text{III.1.2.5c})$$

L'objectif principale de la co-manipulation robotique est de permettre à l'opérateur humain d'accomplir la tâche avec un minimum d'effort fourni, tout en assurant l'exigence primordiale qui est la sécurité ainsi que la transparence et l'assistance. Dans ce qui suit nous allons détailler la nécessité et l'importance de chaque contraintes pour réaliser une co-manipulation efficace.

1.3 Stratégie de commande

1.3.1 Le contrôle d'impédance : une solution à améliorer

De nombreuses méthodes de commande ont été développées pour les tâches nécessitant la coopération de plusieurs robots [67, 68]. Cependant, elles ne peuvent pas être directement appliquées aux cas de robots coopérant avec un opérateur humain. Kosuge et al. dans [69] ainsi que Li et al. [70], ont développés des méthodes de commande pour ce cas de figures. Cependant, l'architecture des commandes était conçue en se basant seulement sur les caractéristiques du robot. Pour assurer une co-manipulation plus efficace il est nécessaire de prendre en compte les caractéristiques de l'opérateur humain lors de la conception du contrôleur. Un des schémas de commande les plus couramment utilisés pour répondre à ce propos est probablement ce qu'on appelle le contrôle d'impédance/admittance. En se basant sur des études analysant la coopération entre deux opérateurs humain pour la manutention de charges lourdes, Ikeura et al. dans [71], ont montré que les paramètres d'amortissement dans le modèle d'impédance de la PHRI sont les coefficients dominant (les plus important), les effets de masse et de ressort peuvent être négligés.

Dans le cadre de co-manipulation pour les tâches de manutention, les méthodes basées sur le contrôle d'impédance ont quelques inconvénients, particulièrement visibles lors des phases d'arrêt et de démarrage. Tout d'abord, en utilisant un amortissement fixe, si l'amortissement est réglé sur une valeur faible, le robot aura tendance à accélérer facilement, mais sera plus difficile à arrêter. Pour le cas d'un amortissement élevé, le robot sera difficile à manipuler et restreint ainsi le mouvement humain (l'opérateur humain ne peut pas opérer aussi rapidement que dans le cas de la coopération entre deux humains). Un autre inconvénient du contrôle d'admittance est liée à la sécurité. Le contrôle d'admittance est connu d'en être instable face à un environnement rigide [72]. Ce problème est difficile à résoudre dans le cadre de la PHRI puisque les opérateurs humains, qui représentent l'environnement, ont une raideur variable. Pour résoudre ces différents problèmes, le contrôle d'impédance variable a été introduit. Plusieurs articles ont été publiés à ce propos. Ikeura et al. dans [73] ont présenté un contrôle d'impédance variable où le coefficient d'amortissement peut prendre deux différentes valeurs en fonction de la vitesse. Plus tard en 2002 [74], ils ont proposé d'ajuster en ligne les paramètres d'amortissement de manière optimale en minimisant une fonction de coût. Tsumugiwa et al. [75] ont proposé d'effectuer un ajustement en ligne de ce coefficient basé sur une estimation en temps réel de la raideur du bras de l'homme. Plus récemment, Duchaine et al dans [76–78] ont proposé une nouvelle méthode, assurant une co-manipulation plus transparente, basée sur un contrôle d'impédance variable ajusté en ligne en fonction de l'intention de l'HO. En effet, la différenciation de la force humaine est considérée comme étant un capteur naturel de l'intention de l'homme. Un inconvénient de cette approche est que l'estimation de l'intention de l'homme est effectuée en utilisant la différenciation des signaux de force et de position, ce qui peut être assez bruyant et peut aussi conduire au problème de division par zéro.

1.3.2 Architecture de commande du cobot

Ce travail de thèse vise principalement à surmonter les limites du contrôle d'impédance mentionné ci dessus. Notre approche se distingue par la nature du problème à résoudre, c'est-à-dire tâches de manutention de charges lourdes, et pour sa vision sur la co-manipulation. Le problème de co-manipulation homme-robot considéré ici consiste à concevoir le bloc « *Cobot* » de la figure 1.1, de manière à ce que celui-ci permette de réaliser la relation maître-esclave schématisée par la boucle d'asservissement décrite dans cette figure. Il s'agit de permettre à l'opérateur de manipuler le robot en toute sécurité, depuis son extrémité, en l'amenant à la position qu'il désire sans avoir à exercer la force nécessaire pour déplacer la charge pendulaire, ni même à ressentir

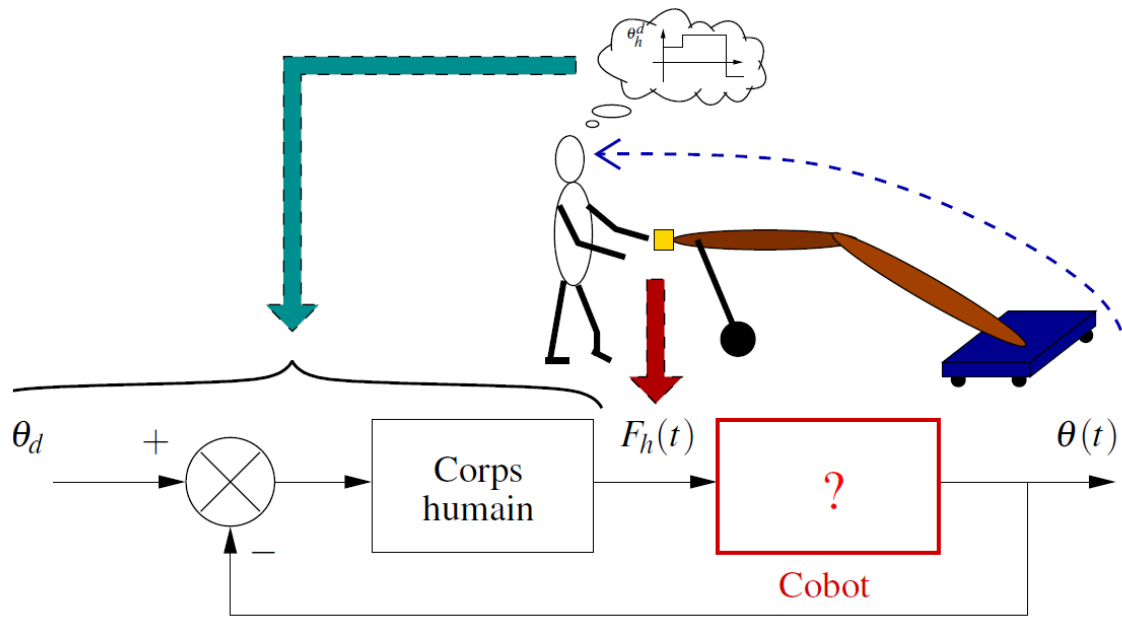


FIGURE 1.1 – Concept de la co-manipulation.

de façon significative la dynamique du robot. Le principe adopté dans ce travail pour répondre au problème de co-manipulation est basée sur la mise en œuvre simultanée de deux fonctions principales. La première réside dans la génération en ligne d'une trajectoire appropriée du point d'interaction située à l'extrémité de l'effecteur et décrivant l'intention de l'opérateur humain. La seconde consiste en la conception d'une structure de contrôle permettant un bon suivi de la trajectoire produite. Ce point de vue sur la co-manipulation est basé sur un constat : l'unique information permettant d'indiquer au robot la direction de déplacement désirée, mais aussi les phases de mise en mouvement ou d'arrêt du robot, est celle provenant de la force \vec{F}_h que l'opérateur exerce sur le robot, justifiant ainsi l'usage d'un capteur de force dont l'information se présente comme indispensable à la stratégie choisie.

1.3.3 Colinéarité entre la force et la vitesse de l'organe terminal

Comme on l'avait mentionné précédemment dans le paragraphe (1.1), maintenir au maximum la colinéarité de la vitesse de l'effecteur et la force d'interaction tout en ayant le même sens, devrait concourir à la réalisation d'une co-manipulation transparente. Le problème de co-manipulation pour les tâches de manutention, vu sous l'angle de la résolution du problème de commande

optimale (III.1.2.5), nous impose idéalement de vérifier en boucle fermée la relation suivante :

$$\vec{X} = \chi \left(q, \dot{q}, \vec{F}_h \right), \quad (\text{III.1.3.6})$$

sous la contrainte du produit vectoriel nul

$$\vec{X} \times \vec{F}_h = \vec{0} \quad (\text{III.1.3.7})$$

et le produit scalaire positif

$$\langle \vec{X} | \vec{F}_h \rangle > 0. \quad (\text{III.1.3.8})$$

où $\chi \left(q, \dot{q}, \vec{F}_h \right)$ est un opérateur mathématique qui peut être assimilée à une relation d'admittance, mais dont l'expression est non triviale et certainement difficile à exprimer analytiquement, car elle doit satisfaire toutes les exigences de manière optimale.

En particulier, $\chi \left(q, \dot{q}, \vec{F}_h \right)$ devrait être en mesure de

- faire face aux événements discrets tels que les décisions imprévisibles qu'a l'opérateur humain de démarrer ou d'arrêter le mouvement du robot,
- maintenir le robot en une position d'équilibre stable, robuste aux perturbations exogènes.

Généralement, cet opérateur est décrit dans le domaine fréquentiel et pris comme une admittance linéaire. Mais il ressort clairement qu'une admittance linéaire ne peut pas simplement faire face aux phases de démarrage et d'arrêt (voir Section 1.3.1). On a vu que même le recours à un contrôle d'impédance variable (cf. [78]), ajusté en fonction de l'intention de l'opérateur, a quelques inconvénients.

Dans cette thèse, la recherche de l'opérateur $\chi \left(q, \dot{q}, \vec{F}_h \right)$ est traitée d'une manière sous-optimale, à travers les deux étapes de conception du générateur de trajectoire en ligne et du régulateur, suivant la méthode décrite dans les chapitres suivants.

Chapitre 2

Génération en ligne de trajectoires

Sommaire

3.1	Commande par anticipation et rétroaction	127
3.1.1	Commande basée sur l'inversion du modèle dynamique	127
3.1.2	Conception du correcteur	129
3.2	Application au Penducobot	130
3.2.1	Présentation du Penducobot	130
3.2.2	Adaptation du générateur de trajectoire au cas du Penducobot	132
3.2.3	Linéarisation autour d'un point d'équilibre	134
3.3	Résultats de simulation	136
3.3.1	Placement de pôle	136
3.3.2	Commande linéaire quadratique	139

2.1 Introduction

2.1.1 Classification des trajectoires

Le problème de génération de trajectoire (*cf.* annexe C) est important pour de nombreux domaines : l'ouvrage de Biagiotti et Melchiorri [1] présente une synthèse des méthodes de génération de trajectoire pour le contexte industriel, les ouvrages de Khalil et de Dombre présentent aussi des différentes méthodes de génération de trajectoire pour les robots manipulateurs [21, 31]. Le générateur de trajectoire a pour fonction de calculer l'évolution des positions des articulations ou de la situation du robot en fonction du temps. Il joue un rôle très important dans

le schéma de commande car la qualité du mouvement produit dépend directement de la continuité de la trajectoire produite et de ses dérivées. Cette qualité a un impact non seulement sur la précision de suivi du chemin mais aussi sur la durée de vie du système mécanique.

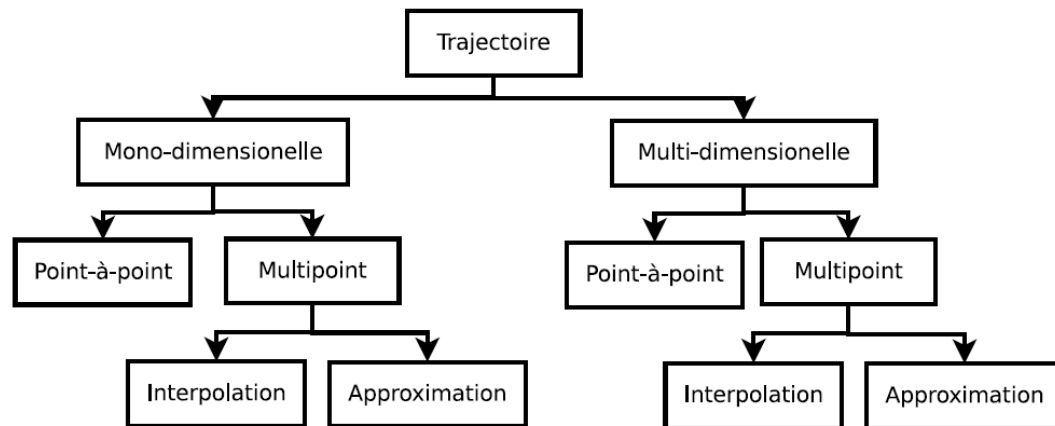


FIGURE 2.1 – Les catégories de trajectoires (voir [1]).

Les trajectoires peuvent être classées en plusieurs catégories (*cf.* Fig.2.1). La catégorie mono-dimensionnelle correspond à la trajectoire d'un degré de liberté du robot. La trajectoire multidimensionnelle est associée soit à un ensemble de degrés de liberté du robot (planification articulaire) soit à l'organe terminal (planification cartésienne). Les trajectoires qui sont définies par deux points c'est-à-dire par les conditions initiales et finales sont appelées des trajectoires point à point. Les trajectoires multi-points, quant-à-elles, passent par des points intermédiaires ou approchent un ensemble de points comme dans le cas des chemins (*cf.* annexe C). En robotique, une des tâches de base que doit accomplir un robot consiste à se déplacer d'un point A à un point B, avec le respect éventuel d'un certain nombre de contraintes (vitesse, accélération max, évitement d'obstacle *etc*). La commande en position du robot consiste donc à calculer les différentes consignes, en fonction du temps, afin de générer le mouvement désiré. C'est pour cela que la commande en position d'un robot est aussi appelée génération de mouvement.

De manière classique, deux types de commande en position sont envisagés :

- une commande en position dans l'espace articulaire (cf. Figure 2.2.a). Pour assurer le passage de la position initiale à la position finale ($q^i \rightarrow q^f$) et le contrôler temporellement, une génération de mouvement est nécessaire. Par exemple, si l'on souhaite synchroniser les axes pour avoir un mouvement harmonieux et contrôler la géométrie du déplacement du robot à chaque itération.
- une commande en position dans l'espace opérationnel (cf. Figure 2.2.b).

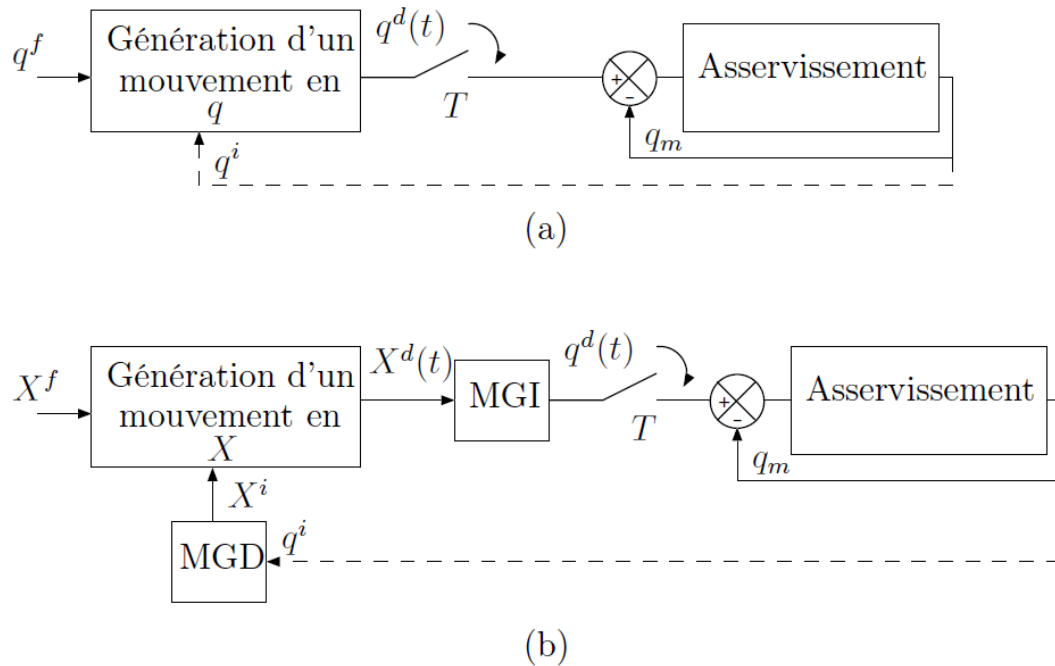


FIGURE 2.2 – Boucles de génération de mouvement. (a) : dans l'espace articulaire - (b) : dans l'espace opérationnel.

Le choix du type de commande peut être effectué en fonction de l'espace dans lequel est décrite la trajectoire à suivre c'est-à-dire dans l'espace articulaire du robot ou dans l'espace cartésien.

La planification dans l'espace articulaire présente plusieurs avantages [21] :

- la planification dans l'espace articulaire ne nécessite pas l'inversion cinématique ou dynamique du modèle, elle est donc moins coûteuse en calcul.
- la planification dans l'espace articulaire permet de s'affranchir des problèmes liés aux configurations singulières et aux redondances des degrés de liberté.
- les contraintes cinématiques et dynamiques, comme par exemple les valeurs maximales de vitesse et du couple, sont directement déduites des limites de chaque actionneur. Pour les trajectoires cartésiennes, ces contraintes nécessitent un calcul.

L'inconvénient de cette méthode est que le chemin correspondant à l'organe terminal dans l'espace des tâches n'est pas prévisible, même s'il est répétitif, ce qui augmente le cas de collisions indésirables dans le cas où le robot fonctionne dans un environnement encombré.

La génération de trajectoire dans l'espace de tâches permet de prédire la géométrie du chemin. Elle dispose cependant d'un certain nombre d'inconvénients :

- elle demande d'appliquer le MGI en chaque point de la trajectoire,
- elle peut être mise en défaut lorsque la trajectoire calculée passe par une configuration singulière ;
- elle peut être mise en défaut lorsque la trajectoire calculée fait passer une articulation hors de ces limites de variation $q \in [q_{min} q_{max}]$;
- les contraintes cinématiques et dynamiques (les valeurs maximales de vitesse et du couple) étant définies dans l'espace opérationnel ne permettent pas d'utiliser au mieux les actionneurs.

Le choix dépend essentiellement de la tâche à effectuer et de l'espace de travail.

La planification de trajectoire peut se faire *hors-ligne* ou *en-ligne*. Contrairement aux méthodes hors lignes qui pré-calculent la trajectoire avant de l'exécuter, les méthodes en-ligne fonctionnent en temps réel. Ces dernières années, grâce à l'importante augmentation des capacités de calcul des ordinateurs, les recherches sur la génération de trajectoire se sont portées principalement sur les méthodes en-ligne.

2.1.2 La génération de trajectoire : état de l'art

Le problème de la génération de trajectoire pour des bras manipulateurs est largement traité dans la littérature [1, 18, 21]. Kröger, dans le chapitre 2 de son ouvrage [79], présente un état de l'art très bien détaillé sur les différentes méthodes de génération de trajectoire en-ligne et hors-ligne. Deux techniques de base de planification de trajectoire sont distinguées [18]. La première est la planification sous contraintes cinématiques (les limites en vitesse et en accélération) entre deux positions. En fonction du nombre de ces contraintes imposées, un type de représentation de trajectoire est utilisé, on note par exemple des courbe polynomiale de degré 2, cubique, de degré 4, quintique (voir Annexe C). La seconde famille de méthodes est la planification dans l'espace cartésien à partir d'un chemin donné [80, 81]. Paul et Taylor proposent des lois d'accélération de type bang-bang (cf. Annexe C). En 1984, Castain [82] propose de changer la loi bang-bang par une loi trapèze et introduit un point intermédiaire entre les points initial et final. L'utilisation des lois d'accélération en trapèze introduit les mouvements bornés en jerk.

Le problème de la génération de trajectoire est généralement traitée comme un problème de satisfaction de contraintes. Par exemple, une cubique peut être utilisée pour satisfaire des contraintes de position et de vitesse ; une quintique peut être utilisée pour satisfaire des contraintes de position, de vitesse et d'accélération.

Dans le contexte de notre travail, la notion de génération de trajectoire est associée aux contraintes cinématiques liées aux mouvements en présence de l'Homme. Ces contraintes sont de nature différentes et ne sont pas liées aux capacités du robot (actionneurs, inerties) mais à la tâche elle-même. En effet la présence de l'Homme en contact avec le robot entraîne des contraintes cinématiques.

La norme développée par l'Organisation Internationale de Standardisation (ISO) ISO-10218 spécifie les exigences de sécurité pour l'intégration des robots industriels dans un contexte d'opération collaborative [83]. Selon cette norme, dans l'ensemble de l'espace de travail du robot, la vitesse de l'organe terminal ne doit pas dépasser $0.25m/s$, la force statique exercée doit être inférieure à $150N$ et la puissance du système doit être inférieure à $80watt$. Moon et al.[84] présentent une étude sur les différentes normes existantes. L'ensemble de ces études montrent que la vitesse du robot est un paramètre important à maîtriser pour respecter la contrainte de sécurité.

Les travaux de Flash et Hogan [Flash 84, Hogan 84] ont montré que les mouvements effectués par les humains sont en général limités en jerk et en accélération. Ainsi, un système limitant ces deux paramètres aura un mouvement souple qui ressemble à ceux des humains et sera plus facilement accepté par l'Homme.

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, la présence de l'Homme dans l'espace de travail du robot introduit des contraintes de sécurité et de confort. Pour respecter la contrainte de sécurité, la vitesse doit être bornée sur l'ensemble de la trajectoire. L'accélération et le jerk doivent également être bornés pour satisfaire la contrainte de confort. Pour représenter ce type de mouvement, une solution est d'utiliser des courbes polynomiales d'un degré supérieur ou égal à trois. Les trajectoires composées de suites de segments de courbes polynomiales cubiques répondent aux contraintes imposées. Dans le contexte d'interaction homme robot, les trajectoires doivent être calculées en-ligne. En d'autres termes, le temps de calcul de la trajectoire doit être suffisamment petit pour permettre une interaction acceptable entre l'Homme et le robot. Des travaux récents ont été menés sur ce type de trajectoires [85, 86] on cite aussi les travaux de [79, 87, 88] etc.

2.2 Un générateur de trajectoire en ligne contrôlé par événement

Les générateurs de trajectoires en ligne ne se limitent pas à un genre ou à un groupe particulier de robotique. En effet, ils sont conçus pour donner de nouvelles opportunités en matière du contrôle de mouvement de robots basé sur l'utilisation de capteurs. Ils permettent ainsi d'ouvrir la porte à des domaines d'application tels que la robotique de services, de contrôle pour la manipulation, de robotique humanoïde ainsi que d'interaction homme-robot. La question principale dans le cadre de la co-manipulation est de savoir comment transmettre au robot l'intention de l'opérateur humain de déplacer la charge ou de l'arrêter. Le signal physique échangé entre l'opérateur et le robot contient intrinsèquement des informations sur l'intensité de la force (norme), l'orientation (direction) et le sens. Le rôle du générateur de trajectoire est de convertir les mesures de cette force en instructions de déplacement pour tous les DDLs du robot. L'opérateur humain contribue au processus de co-manipulation en faisant une boucle de rétroaction visuelle de la position qu'il observe (actuelle) avec celle qu'il souhaite atteindre (voir Figure 1.1).

2.2.1 Traitement de l'intensité de la force appliqué par l'opérateur

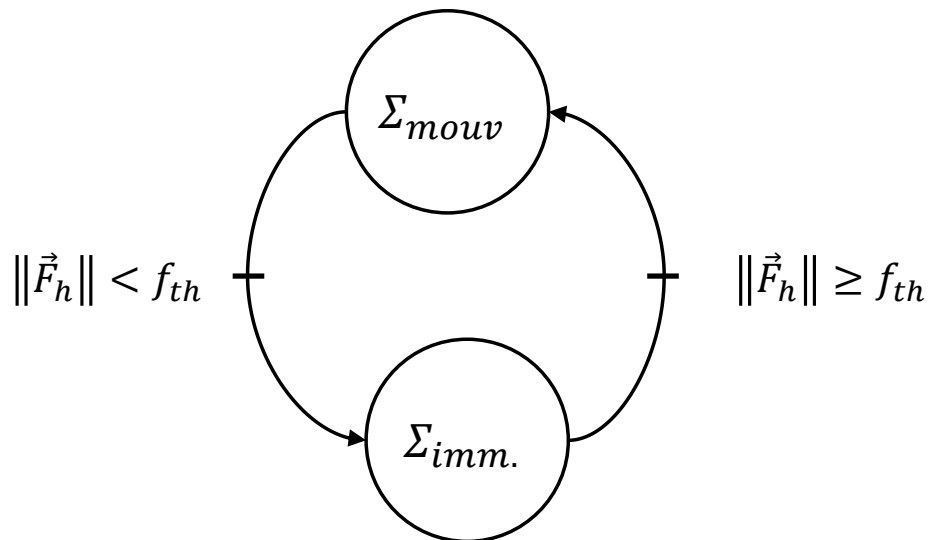


FIGURE 2.3 – L'automate qui régit les états du mouvement.

Définissons un seuil de force, noté f_{th} , qui permet de distinguer l'intention de l'homme de déplacer le robot si l'amplitude de la force d'interaction est supérieure à f_{th} et la volonté de l'arrêter si l'amplitude de la force est plus faible. Désignons par

- h_r la quantité logique qui passe à 1 lorsque la mesure de la force franchit le seuil f_{th} avec un front montant,
- h_f la quantité logique qui passe à 1 lorsque la mesure de la force franchit le seuil f_{th} avec un front descendant.

Quand h_r passe à 1, cela signifie que le robot entre dans un *état de mouvement*, noté Σ_{mouv} , et il y reste. C'est donc un événement à partir duquel deux phases se succèdent

1. une phase transitoire correspondant au démarrage du mouvement, notée ϕ_{rise} ,
2. une phase de mouvement établi, notée ϕ_{cruise} .

Quand h_f passe à 1, cela signifie que le robot entre dans un *état d'immobilité*, noté Σ_{imm} , et s'arrête à la position désirée. C'est aussi un événement pour lequel deux phases qui se succèdent peuvent être distinguées

1. une phase transitoire correspondant au mouvement de décélération jusqu'à l'arrêt, notée ϕ_{fall} ,
2. une phase d'arrêt au cours de laquelle la configuration du robot est maintenu dans une position d'équilibre, notée ϕ_{stop} .

Pour réaliser un mouvement plus naturel, les phases transitoires et celles du mouvement établi doivent être personnalisables. Désignons par ε_f la durée de ϕ_{fall} et par ε_r celle de ϕ_{rise} . Ces réglages dépendent de la nature de l'objet manipulé, de son environnement et des capacités physiques de l'opérateur humain. La personnalisation de la partie transitoire devrait permettre d'ajuster le temps de réaction pour correspondre à l'effort minimal que peut appliquer un opérateur, selon ses capacités. Le réglage de la phase de mouvement établi devrait être compatible avec la contrainte imposée à la vitesse du point d'interaction, c'est-à-dire avec une vitesse d'amplitude constante et modérée, noté V_0 . L'opérateur humain garde le contrôle sur seulement la décision de la durée de ϕ_{stop} et ϕ_{cruise} . Par conséquent, le traitement de la force d'interaction permet d'identifier les instants de déclenchement des phases montantes et descendantes, noté t_0 . Ces moments sont capturés en comparant en permanence l'amplitude de cette force avec le seuil f_{th} . Le générateur de trajectoire en ligne est ainsi contrôlé par événements, il peut être régit par l'automate ayant deux états discrets, décrits dans la Figure 2.3. On observe bien que le séquençement de chaque phase suit toujours le même cycle périodique fermé telle que représenté dans la Figure 2.4.

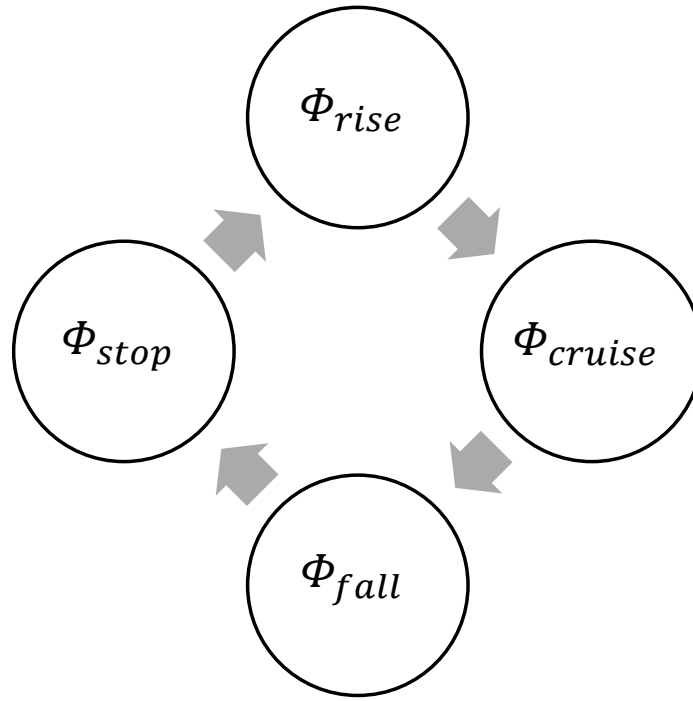


FIGURE 2.4 – Cycle périodique des phases.

2.2.2 Profil de vitesse à Jerk minimal

Le rôle du générateur en ligne de trajectoire est de convertir le traitement en temps réel de la force qu’applique l’opérateur en consignes de déplacement du point d’interaction, qui dépendent de la phase dans laquelle est l’interaction. Ces consignes de déplacement doivent s’appuyer sur un profil de vitesse spécifique, noté $V_P(t)$. Ce profil doit répondre aux exigences attendues sur la norme de la vitesse désirée du point d’interaction (noté \vec{X}_d), à savoir la sécurité, la transparence et la fluidité du mouvement d’interaction. Une bonne compréhension des mouvements du bras humain, comme largement étudiés par les auteurs dans [89, 90], devrait contribuer à une meilleure prise en compte des exigences de co-manipulation dans la définition des trajectoires à suivre. Cependant, par souci de simplicité et de concision dans ce qui suit, nous avons fait le choix de ne pas inclure la dynamique du bras humain dans la modélisation de l’interaction homme-robot en termes de force et de trajectoires, alors qu’elle devrait être incluse pour une étude plus rigoureuse et plus complète. En retour, une représentation plus simple de l’interaction homme-robot est considérée. Comme nous l’avons expliqué dans la Section 2.1.2, la présence de l’opérateur humain dans l’espace de travail du robot introduit des contraintes. Pour

respecter la contrainte de sécurité, la vitesse doit être bornée sur l'ensemble de la trajectoire. D'autre part l'accélération et le jerk doivent également être bornés pour satisfaire la contrainte de confort. En effet, les travaux de Flash et Hogan ont montré que les mouvements naturels d'un opérateur humain sont en général limités en jerk et en accélération. Ainsi, un système limitant ces deux paramètres aura un mouvement souple qui ressemble à ceux des humains et sera plus facilement accepté par l'Homme. En outre, plusieurs travaux tels que ceux de Craig et al. [91], Piazzzi et al. [92] ainsi que Croft et al. [93] ont bien établi et démontré expérimentalement que la limitation de jerk est importante pour la réduction de l'attrition (usure) du robot ainsi que pour l'amélioration du suivi de trajectoire en terme de rapidité et précision. Par ailleurs, elle conduit à un meilleur contrôle des actionneurs, ce qui réduit l'excitation des dynamiques rapides du manipulateur telles que les modes vibratoires.

Pour prendre en considération toutes ces spécifications, nous proposons d'imposer à $\|\vec{X}_d\|$ la fonction du temps vérifiant le minimum jerk $V_p(t)$. Cette fonction, permettant la satisfaction des exigences de chaque phase définies auparavant, est donnée par un polynôme définie par morceau, basé sur le polynôme quintique suivant

$$V_p(t) = V_i + (V_f - V_i) \left(10 \left(\frac{t}{T} \right)^3 - 15 \left(\frac{t}{T} \right)^4 + 6 \left(\frac{t}{T} \right)^5 \right), \quad (\text{III.2.2.1})$$

où T , V_i et V_f sont des paramètres qui dépendent de la phase en cours (actuelle) de l'interaction home-robot, tel que décrit dans le Tableau 2.1.

Phase	Réglage des paramètres	Expression du profil de vitesse
ϕ_{stop}	$T \neq 0, V_i = 0, V_f = 0$	$V_p(t) = 0$
ϕ_{rise}	$T = \varepsilon_r, V_i = 0, V_f = V_0$	$V_p(t) = V_f \left(10 \left(\frac{t}{\varepsilon_r} \right)^3 - 15 \left(\frac{t}{\varepsilon_r} \right)^4 + 6 \left(\frac{t}{\varepsilon_r} \right)^5 \right)$
ϕ_{cruise}	$T \neq 0, V_i = V_0, V_f = V_0$	$V_p(t) = V_0$
ϕ_{fall}	$T = \varepsilon_f, V_i = V_0, V_f = 0$	$V_p(t) = V_0 \left(10 \left(\frac{t}{\varepsilon_f} \right)^3 - 15 \left(\frac{t}{\varepsilon_f} \right)^4 + 6 \left(\frac{t}{\varepsilon_f} \right)^5 \right)$

TABLE 2.1 – Expression du profil de vitesse dépendante de la phase.

2.2.3 Traitement de la direction de la force appliquée par l'opérateur

Comme mentionné dans le chapitre III.1, la vitesse désirée \vec{X}_d du point d'interaction devrait en être à chaque instant colinéaire à la force exercée par l'opérateur tout en ayant le même sens. Ainsi, l'angle que forment la vitesse désirée du point d'interaction et la force appliquée par

l'opérateur $\widehat{(\vec{X}_d, \vec{F}_h)}$ doit être nul tout au long la tâche de co-manipulation, ce qui est équivalent à assurer les contraintes (III.1.2.5a) et (III.1.2.5b) qui sont

- $\|\vec{X}_d \times \vec{F}_h\| = 0$,
- $\langle \vec{X}_d | \vec{F}_h \rangle > 0$.

En d'autres termes, \vec{X}_d doit avoir le même angle d'orientation, noté θ_h , que celui de \vec{F}_h . Ainsi, la direction à suivre, donnée par le vecteur unitaire \vec{U}_{θ_h} , doit être extraite de la mesure de la force \vec{F}_h . Le capteur de force fournit les coordonnées de \vec{F}_h exprimés dans la base de l'organe terminal. Une simple utilisation des matrices de transformations homogènes (rotations) permet alors l'obtention des coordonnées correspondantes exprimées dans la base de l'espace des tâches. Pour le cas des robots planaires ces coordonnées sont donné par $\vec{F}_h = \begin{bmatrix} F_x & F_y \end{bmatrix}^T$. Ainsi, l'angle d'orientation est donné par $\theta_h = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right)$. Par conséquent, une fois la norme désirée du vecteur \vec{X}_d est calculée comme indiquée dans le Paragraphe 2.2.2, les coordonnées de \vec{X}_d dans la base de l'espace des tâches sont facilement obtenues par la relation

$$\vec{X}_d = V_p \vec{U}_{\theta_h}. \quad (\text{III.2.2.2})$$

La position désirée \vec{X}_d est obtenue en effectuant une intégration numérique des coordonnées de \vec{X}_d , en utilisant par exemple la méthode d'Euler explicite, tandis que l'accélération correspondante $\ddot{\vec{X}}_d$ est déduite par le biais de différentiation numérique basique.

Tous ces vecteurs sont utilisés dans une composante d'inversion du modèle cinématique (MCI) (cf. Chapitre II.1) afin de calculer les variables appropriées nécessaires pour notre structure de commande, tels que les positions articulaires, vitesses et accélérations.

2.2.4 Algorithme récursif

Du fait que l'opérateur humain peut modifier son mouvement désiré de manière imprévisible (une présence soudaine d'un obstacle, un changement inattendu de destination, etc), le traitement en temps réel de la force d'interaction nécessite de mémoriser les instants de démarrage et d'arrêt du mouvement du robot dans des cellules mémoires, en même temps que les valeurs de l'état correspondant c'est-à-dire position, vitesse, etc.

Étant donné que les signaux de mouvement désirés $(\vec{X}_d, \dot{\vec{X}}_d, \ddot{\vec{X}}_d)$ sont générés en temps réel, les informations nécessaires au prochain cycle de calcul doivent être stockés à chaque instant.

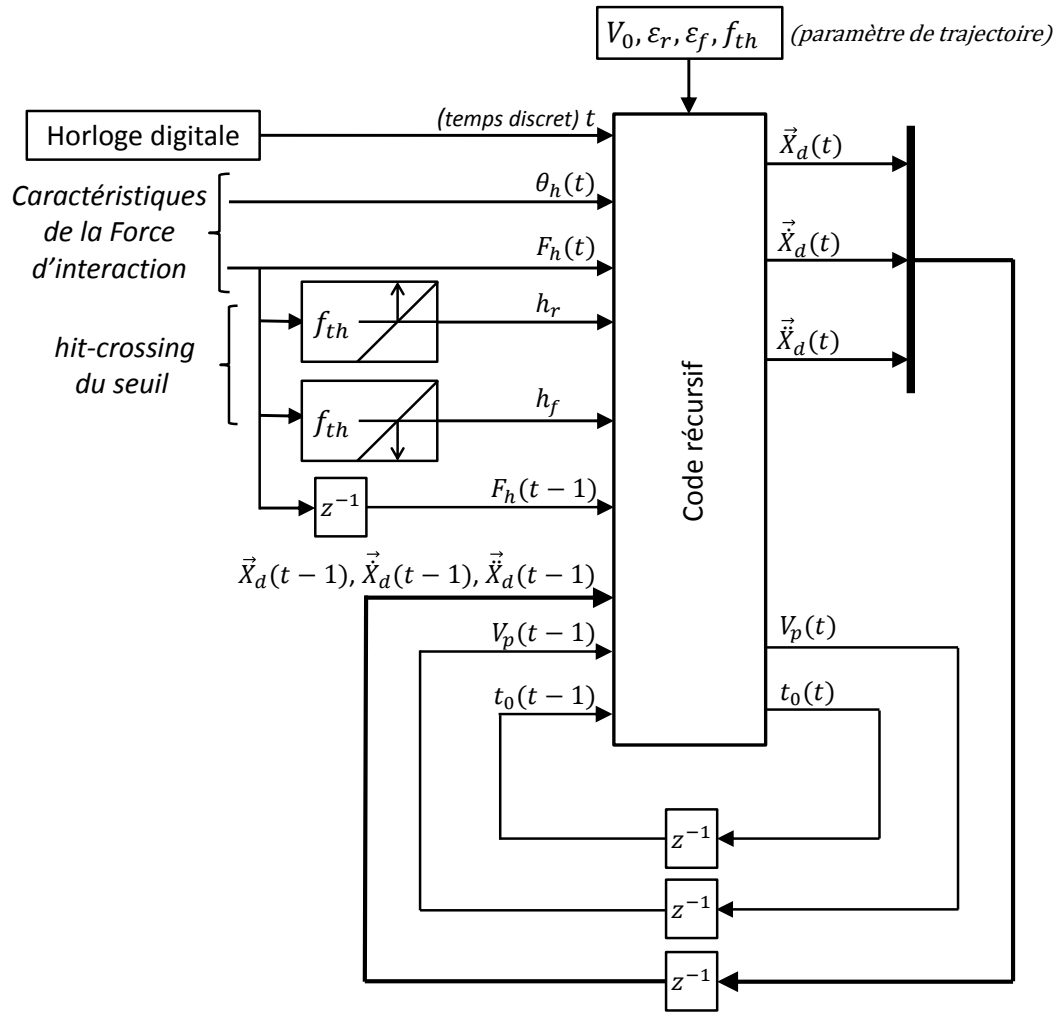


FIGURE 2.5 – Schéma bloc de l'algorithme récursif de génération de la trajectoire désirée.

L'algorithme de génération de ces lignes directrices est nécessairement récursif et peut être représentée par le schéma block de la Figure 3.1.

Chapitre 3

Commande d'un robot en interaction : Cas de robots sous actionnés à charges pendulaires

Sommaire

4.1 Formulation du problème	144
4.2 Contrôle d'impédance basé sur la génération en ligne de trajectoire	145
4.3 Application au robot à deux bras	147
4.3.1 Adaptation du Générateur de trajectoire au cas du robot à deux bras	148
4.3.2 Résultats de simulation	149

Comme on l'a déjà mentionné dans le chapitre 1, l'architecture de la commande envisagée s'appuie sur la mise en œuvre simultanée de deux fonctions au sein d'une même structure de commande :

1. La génération d'une trajectoire appropriée, répondant aux attentes du manipulateur en termes de déplacement désiré, d'assistance en effort et de transparence en fonctionnement, tout en garantissant sa sécurité.
2. La mise en œuvre d'un correcteur qui garantisse le suivi de la trajectoire générée en temps réel, en présence des imperfections inhérentes au fonctionnement réel de tels systèmes.

L'adaptation du générateur de trajectoire en ligne, décrit dans le chapitre 2, aux architectures des robot utilisés permet d'accomplir la première fonction. La deuxième fonction s'appuie sur l'asservissement des actionneurs du robot à la trajectoire générée pour tous les DDLs du robot

afin de garantir un bon suivi en présence de perturbations ou d'incertitudes paramétriques. Cet asservissement est obtenu par le biais de différentes structures de commande.

Ce chapitre traite le cas de robots sous actionnées à charge pendulaire. Un champ d'application potentiel de la stratégie proposée ici est l'industrie manufacturière telles que l'industrie de construction et d'assemblage où les tâches de manutention exigent des efforts considérables. L'architecture mécanique du robot considéré est comme décrite précédemment dans la Section III.1.2.1, c'est-à-dire que chaque articulation (ou *axe*) réalise une liaison pivot entre les deux bras qui lui sont reliés. Chaque axe est équipé d'un moteur. Une charge pendulaire est reliée au seul bras du robot possédant une extrémité libre, à l'aide d'une liaison pivot non-actionnée, faisant du robot un *système mécanique sous-actionné*. On suppose que l'opérateur est en contact direct avec l'extrémité libre du robot, sur laquelle est montée un capteur de force mesurant celle-ci dans les trois directions.

Afin de réaliser la tâche co-manipulation, il est nécessaire d'obtenir toutes les informations sur la force d'interaction. L'utilisation d'un capteur de force permet d'avoir ces informations. Le choix de la localisation du capteur n'est pas aléatoire, il doit dépendre de la tâche de co-manipulation, l'architecture du robot *etc.* Pour notre cas, étant donné que l'opérateur humain interagit directement avec le robot et non pas directement avec la charge, le capteur de force peut être monté sur l'organe terminal du robot. L'idée derrière ce choix de la position du capteur est de permettre la distinction entre la force appliquée par l'opérateur humain et les perturbations causées par les incertitudes de la masse (charge). En d'autres termes, la force résultante de la charge considérée comme une perturbation ne doit pas être détectée par le capteur. Cependant par soucis de robustesse, elle devrait être compensée par la boucle d'asservissement de position.

3.1 Commande par anticipation et rétroaction

3.1.1 Commande basée sur l'inversion du modèle dynamique

Le générateur de trajectoire décrit dans la Section 2.2 du chapitre précédent doit permettre de produire en temps réel une trajectoire pour les DDLs actionnés. Les actionneurs étant commandés en couple, il faut alors générer les couples désirés correspondant à la trajectoire des DDLs actionnés. Par ailleurs, les robots considérés étant sous-actionnés, leur commande doit permettre de stabiliser les DDLs non-actionnés. Pour cela, la génération d'une trajectoire appropriée pour

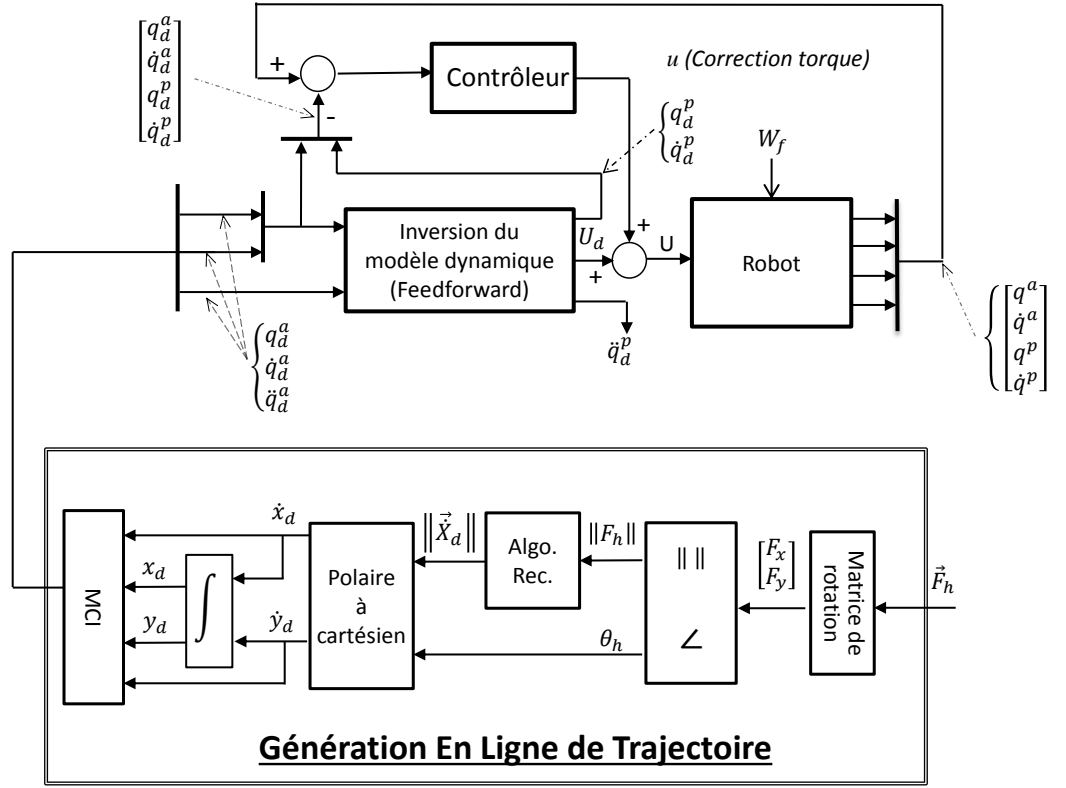


FIGURE 3.1 – Structure de commande d'un robot planaire avec un DDL passif.

ces DDLs est également envisagée, afin d'inclure dans la commande, la compensation des erreurs de suivi de trajectoire pour ces DDLs. Le couple et la trajectoire désirée pour les DDLs non-actionnés sont obtenus par l'inversion du modèle dynamique du robot.

En notant q^a le vecteur des Degrés De Liberté (DDLs) actionnés, q^p celui du DDL non actionné. On peut facilement voir que l'équation (III.1.2.2) s'écrit dans ce cas

$$\vec{X} = J(q^a)\dot{q}^a, \quad (\text{III.3.1.1})$$

et l'équation du mouvement (III.1.2.4) est donnée par

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = U + W_f + \tau_h. \quad (\text{III.3.1.2})$$

le vecteur des couples appliqués est $U = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, tel que $\tau \in \mathbb{R}^{n-1}$ correspond au vecteur des couples appliqués aux DDLs actionnés et 0 est le couple nul appliqué à l'articulation passive.

Étant donné une trajectoire pour q^a , notée q_d^a , donnée par le générateur de trajectoire en ligne, le rôle du module d'inversion est de déterminer à chaque instant, un couple désiré noté U_d et une trajectoire désirée pour q^p , notée q_d^p , de sorte que $q_d^T := \begin{bmatrix} q_d^{aT} & q_d^{pT} \end{bmatrix}$ vérifie l'équation de mouvement (III.3.1.2). Cela signifie que ce module d'inversion implémente la résolution numérique de (III.3.1.2) en les inconnues q_d^p et U_d , à partir de q_d^a . Ceci est implémenté dans la composante d'anticipation (Feedforward) nommé «Inversion du modèle dynamique » de la structure de commande de la Figure 3.1.

3.1.2 Conception du correcteur

Pour compenser les incertitudes de modèle (conditions initiales, paramètres, etc) qui peuvent entacher le résultat de l'inversion du modèle, il est essentiel d'asservir les mesures de position et de vitesse aux trajectoires désirées correspondantes, pour chaque DDL. L'usage d'un correcteur dans cette boucle d'asservissement doit permettre de garantir la convergence des DDLs vers les trajectoires désirées. Soient $\tilde{q} = q - q_d$ l'erreur de position et $\dot{\tilde{q}} = \dot{q} - \dot{q}_d$ celle de vitesse, tel que $q_d = \begin{bmatrix} q_d^{aT} & q_d^{pT} \end{bmatrix}^T$. La loi de commande par inversion de modèle U_d additionnée à un couple u , correspondant à la sortie du correcteur recherché devant assurer le suivi de trajectoire :

$$U := u + U_d \quad (\text{III.3.1.3})$$

Le problème de commande consiste à concevoir un correcteur permettant d'éliminer asymptotiquement l'erreur de suivi, c'est-à-dire tel que soit vérifié en boucle fermée la relation $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0$. Remarquons que le système en boucle fermé est non-linéaire, avec $\begin{bmatrix} \tilde{q}^T & \dot{\tilde{q}}^T \end{bmatrix} = 0$ comme étant l'un des points d'équilibre. Afin de réaliser l'objectif de commande, nous proposons de concevoir un correcteur linéaire par soucis de simplicité, bien que tout type de correcteur puisse être envisagé dans la stratégie de commande proposée. Pour cela, nous considérons les résultats suivants (cf. [94]) relatifs à la linéarisation d'un système non-linéaire et au développement de lois de commande à partir du modèle linéarisé. Considérons le système non-linéaire (III.3.1.2) sous forme d'état et décrit par

$$\dot{x} = f(x) + g(x)U, \quad x \in \mathbb{R}^{2n} \quad (\text{III.3.1.4})$$

où x est le vecteur d'état du système (III.3.1.2) et U la commande. Un point d'équilibre du système (III.3.1.4) est un couple (x_0, U_0) tel que $f(x_0) + g(x_0)U_0 = 0$.

Théorème 4. *Si le linéarisé du système (III.3.1.4) au voisinage du point d'équilibre $P_0 := (x_0, U_0)$ est commandable, alors le système non-linéaire (III.3.1.4) est localement commandable au point d'équilibre P_0 . De plus, dans le cas où le linéarisé est commandable, il est stabilisable et le système non-linéaire correspondant est également stabilisable avec le même bouclage, dans un voisinage du point P_0 .*

Soit $(x_d(t), U_d(t))$ la paire composée de la trajectoire désirée $x_d \in \mathbb{R}^n$ et de la commande associée $U_d \in \mathbb{R}^n$, vérifiant (III.3.1.4) $\forall t \geq 0$. Le résultat suivant (cf. [95]) permet d'assurer une convergence exponentielle de x vers la trajectoire désirée x_d par le biais d'une loi de commande par retour d'état statique.

Théorème 5. *Considérons le système non-linéaire (III.3.1.4) où f et g sont deux champs de vecteurs de dimension n . Supposons que $f(0) = 0$ et soient $\mathbb{A} = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$, $\mathbb{B} = g(0)$, tels que la paire (\mathbb{A}, \mathbb{B}) soit commandable. Soit $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ un vecteur de gains tel que $\mathbb{A} + \mathbb{B}K$ soit Hurwitz. Alors la loi de commande (III.3.1.5) assure localement la convergence exponentielle de $x(t)$ vers $x_d(t)$.*

$$U(t) = K(x(t) - x_d(t)) + U_d(t) \quad (\text{III.3.1.5})$$

Remarque 5. *Le théorème 5 ne s'applique qu'au suivi des trajectoires au voisinage du point d'équilibre nul $P_0 = 0$, puisque $f(0) = 0$ et $U_d(0) = 0$. Pour l'appliquer à d'autres points d'équilibre, un changement de variable permet d'obtenir une formulation identique à (III.3.1.4). En posant $z = x - x_0$ et $v = U - U_0$, la loi de commande (III.3.1.5) et le système non-linéaire (III.3.1.4) se réécrivent avec z , v , \hat{f} et \hat{g} au lieu de x , U , f et g , où*

$$\begin{aligned} \hat{f}(z) &:= f(z + x_0) + g(z + x_0)U_0, & \hat{g}(z) &= g(z + x_0), \\ v &:= v_d + K(z - z_d) \text{ où } z_d = x_d - x_0 \text{ et } v_d = U_d - U_0. \end{aligned} \quad (\text{III.3.1.6})$$

3.2 Application au Penducobot

3.2.1 Présentation du Penducobot

Dans cette section, la stratégie de commande précédente est appliquée à l'exemple démonstratif du *penducobot* (cf. chapitre II.3). Il s'agit d'un robot dont l'architecture mécanique est esquissée (voir Figure 3.2). Il est composé d'un bras, relié à la base par une articulation pivot au point O . Ce bras est homogène, rigide et de masse m . Un objet ponctuel de masse μ , situé au point M , est

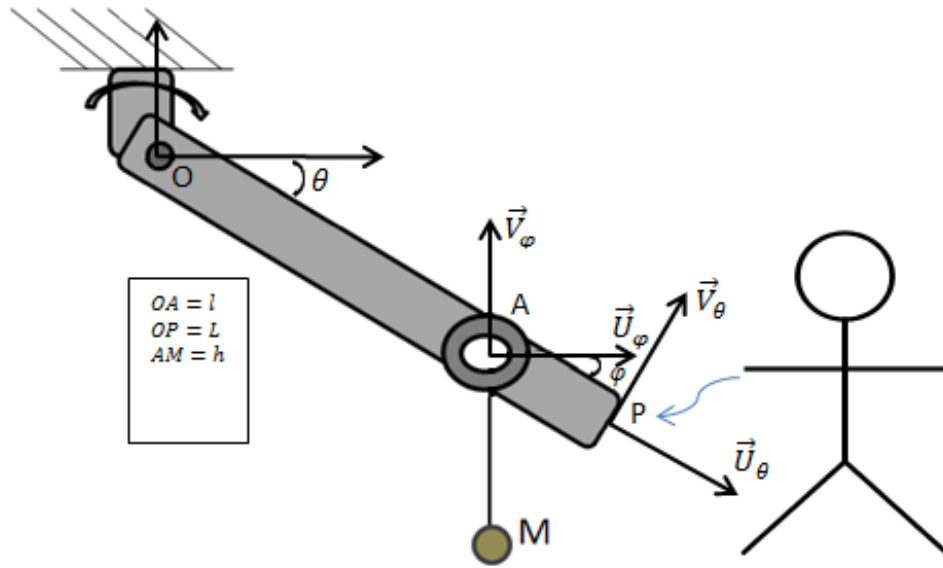


FIGURE 3.2 – Penducobot.

suspendu au bras avec une barre rigide sans masse et liée au bras par une liaison pivot au point A non-actionnée. La position de la barre est défini par le vecteur \vec{AM} . Une base orthonormée $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est attaché à un référentiel Galiléen. Une autre base orthonormée et tournante, est attachée au bras et constituée du triplet de vecteurs $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta, \vec{z})$. Enfin, une dernière base orthonormée et tournante, est attachée à la barre rigide et est constituée du triplet de vecteur $(\vec{u}_\varphi, \vec{v}_\varphi, \vec{z})$. L'axe \vec{z} correspond à l'axe de rotation des deux articulations. Les angles θ et φ sont définis Figure 3.2. L'extrémité est repérée par le point P où l'opérateur humain conduit le robot et lui applique une force notée \vec{F}_h . Soient $\vec{OA} = l\vec{u}_\theta$, $\vec{AM} = -h\vec{v}_\varphi$ et $\vec{OP} = L\vec{u}_\theta$ où L et h sont les longueurs du bras et de la barre rigide, respectivement, tandis que l est la distance entre les deux articulations. Le couple moteur C_m appliqué au bras au point O correspond à la commande du système. L'opérateur applique l'effort \vec{F}_h et il en résulte un couple noté $C_h = J(\theta)^T \vec{F}_h = L \|\vec{F}_h\|$ appliqué au bras, au niveau du point O , où $J(\theta)$ est le Jacobien du manipulateur. Les articulations du robot aux points O et A sont supposées être avec frottement de type visqueux. Le frottement dans la liaison au point O , dont le coefficient est noté f_o , donne lieu au couple résistant noté C_{f_o} correspondant à l'action du bâti sur le bras du robot. Le frottement dans la liaison au point A , dont le coefficient est noté f_A , donne lieu au couple résistant noté C_{f_A} correspondant à l'action de la masse sur le bras du robot. Les angles θ et φ , ainsi que leur dérivée première, sont supposés être mesurés par des capteurs appropriés. Par ailleurs, la mesure de C_h est aisément déduite de celle de \vec{F}_h . Dans le chapitre II.3, on avaient introduit les variables suivantes :

$J_\theta = m\frac{L^2}{3} + \mu l^2$, $J_{\alpha\theta} = \mu lh$, $\gamma_\theta = (m\frac{L}{2} + \mu l)$, $\gamma_\alpha = \mu h$. On a vu qu'en introduisant le changement de variable $\alpha := \theta + \varphi + \frac{3\pi}{2}$, les caractéristiques de l'équation de mouvement (III.3.1.2) s'écrivent

$$M(q) := \begin{bmatrix} J_\theta & J_{\alpha\theta} \cos \alpha - \theta \\ J_{\alpha\theta} \cos \alpha - \theta & J_\alpha \end{bmatrix},$$

$$C(q, \dot{q}) := \begin{bmatrix} 0 & -J_{\alpha\theta} \dot{\alpha} \sin \alpha - \theta \\ J_{\alpha\theta} \dot{\theta} \sin \alpha - \theta & 0 \end{bmatrix},$$

$$W_f := \begin{bmatrix} C_{f_A} + C_{f_O} \\ -C_{f_A} \end{bmatrix}, \quad g(q) := \begin{bmatrix} \gamma_\theta g \cos \theta \\ \gamma_\alpha g \cos \alpha \end{bmatrix},$$

où $q := \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \end{bmatrix}$, $U := \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\tau := C_m + C_h \in \mathbb{R}$.

3.2.2 Adaptation du générateur de trajectoire au cas du Penducobot

Le générateur de trajectoire, décrit dans le Chapitre III.2, est adapté au problème du Penducobot de sorte que différents seuils de force peuvent être affectés à la direction de rotation du bras principal, qu'on note f_{th-} pour le sens des aiguilles d'une montre et f_{th+} pour le sens contraire.

Remarquons que la norme de la vitesse de l'organe terminal est donnée pour cette application par $\|\vec{\dot{X}}\| = L|\dot{\theta}|$. Ainsi pour le cas du Penducobot, ça revient en même de générer un profil pour $\|\vec{\dot{X}}\|$ ou pour $|\dot{\theta}|$. Désignons par ω_0 la vitesse de croisière du profil de vitesse désiré du point d'interaction. Soit $\tilde{\omega}_0$ définie tel qu'elle ait le même signe que le produit scalaire $\langle \vec{F}_h | \vec{V}_\theta \rangle$ afin de prendre en compte le sens de déplacement (le sens de la rotation) :

$$\tilde{\omega}_0 = \text{sign}\{\langle \vec{F}_h | \vec{V}_\theta \rangle\} |\omega_0|. \quad (\text{III.3.2.7})$$

Ainsi, le paramètre V_0 du profil de vitesse, définie dans la Section 2.2.2 du chapitre 2 correspond ici à $\tilde{\omega}_0$.

Pour le cas du Penducobot nous avons besoin de redéfinir les variable logique h_r et h_f définies dans la Section 2.2.1 comme suit :

- h_{r+} la quantité logique qui passe à 1 lorsque la mesure de la force franchit le seuil f_{th+} avec un front montant,

Algorithme :

```

if (  $h_{r+}$  or  $h_{f-}$  )
     $t_0 = t$  ;
     $\theta_0 = \theta_0(i-1)$  ;
     $\dot{\theta}_0 = 0$  ;
elseif (  $h_{f+}$  or  $h_{r-}$  )
     $t_0 = t$  ;
     $\theta_0 = \theta_0(i-1)$  ;
     $\dot{\theta}_0 = \omega_0$  ;
else
     $t_0 = t_0(i-1)$  ;
     $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}_0(i-1)$  ;
     $\theta_0 = \theta_0(i-1)$  ;
if (  $F_h \geq f_{th+}$  or  $F_h \leq f_{th-}$  )
    Le robot entre dans un état de mouvement :  $\Sigma_{mouv}$ 
    if (  $t \leq t_0 + \varepsilon_r$  )
        phase transitoire :  $\phi_{rise}$ 
    else
        Phase de mouvement établi :  $\phi_{cruise}$ 
    end
elseif (  $F_h \leq f_{th+}$  or  $F_h \geq f_{th-}$  )
    Le robot entre dans un état d'immobilité :  $\Sigma_{imm}$ 
    if (  $t \leq t_0 + \varepsilon_f$  )
        phase transitoire :  $\phi_{fall}$ 
    end
end
else
    Phase de mouvement établi :  $\phi_{stop}$ 
end
end
end

```

FIGURE 3.3 – Code récursif.

- h_{f+} la quantité logique qui passe à 1 lorsque la mesure de la force franchit le seuil f_{th+} avec un front descendant.
- h_{r-} la quantité logique qui passe à 1 lorsque la mesure de la force franchit le seuil f_{th-} avec un front montant,
- h_{f-} la quantité logique qui passe à 1 lorsque la mesure de la force franchit le seuil f_{th-} avec un front descendant.

Notons par

- θ_0 la valeur de θ à mémoriser, correspondant au dernier changement de phase.
- $\dot{\theta}_0$ la valeur de $\dot{\theta}$ à mémoriser, correspondant au dernier changement de phase.

Le code récursif associé au cas du Penducobot est donné par le Tableau 3.3 : Afin d'illustrer le comportement du Générateur de Trajectoire d'une manière simple, une fonction sinus est affectée à $F_h = \|\vec{F}_h\|$. La Figure 3.4 représente la force humaine normalisée $\hat{F}_h(t) := \frac{F_h(t)}{\|F_h(t)\|_\infty}$ par la courbe rouge, la progression du profil normalisé de la vitesse désirée de l'effecteur $\frac{d\hat{\theta}_d(t)}{dt} := \frac{\dot{\theta}_d(t)}{\|\dot{\theta}_d(t)\|}$ lors de l'interaction homme-robot (en bleu) ainsi que les seuils normalisés f_{th+} et f_{th-}

en tirets et tirets-pointillés marron. On peut observer les différentes phases qui se succèdent, identifié par les termes RAMP, STOP et CRUISE :

- RAMP : est utilisé pour désigner à la fois les phases de montée et de descente,
- STOP : correspond à la phase d'arrêt (immobilité vitesse nulle),
- CRUISE : est pour désigner la phase de croisière (c'est-à-dire profil de vitesse constant).

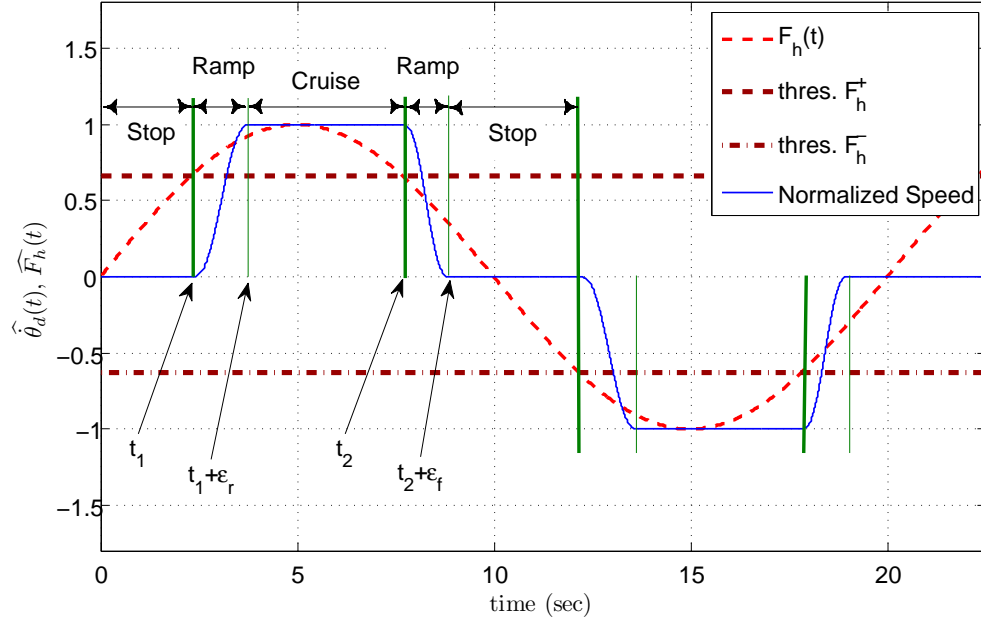


FIGURE 3.4 – Profil de vitesse désirée $\hat{\theta}_d$ généré par le traitement de la force F_h .

Remarque 6. Les bruits affectant la mesure de la force pourrait entraîner le générateur de trajectoire de basculer de façon continue entre les différentes phases. Ce scénario pourrait être évité par l'utilisation de seuils avec hystérésis, afin d'éviter que de petits changements (correspondant aux événements déclencheurs indésirables) d'avoir un quelconque effet.

Remarque 7. Pour assurer le maximum de transparence sans nuire à la sécurité de l'opérateur et pour traduire la volonté de l'opérateur d'accélérer le mouvement du bras du robot ou de décélérer, l'idée de définir plusieurs seuils peut être envisagée. La mise en oeuvre d'un tel algorithme n'est pas si compliquée.

3.2.3 Linéarisation autour d'un point d'équilibre

Soit $x = [x^1 \ x^2 \ x^3 \ x^4]^T = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]^T \in \mathbb{R}^4$. En écrivant l'équation matricielle du mouvement du penducobot sous la forme d'état (III.3.1.4), l'ensemble des points d'équilibre est

donné par la paire (x_0, U_0) où $x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 & x_0^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ est tel que

$$\forall x_0^1 \in [0, 2\pi[, x_0^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } U_0 = \gamma_\theta g \cos x_0^1. \quad (\text{III.3.2.8})$$

En prenant x_0^1 quelconque, U_0 est déterminé de manière unique et il n'y a que deux positions d'équilibre possibles pour x_0^2 . Le calcul du Hessien de l'énergie potentielle permet de vérifier que seul (x_0, U_0) où $x_0^2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \forall k \in \mathbb{Z}$, est une position d'équilibre stable, correspondant à un « *puits d'énergie potentielle* ». Soit le changement de coordonnées suivant pour le modèle sous la forme d'état (III.3.1.4)

$$z := x - x_0 \text{ et } \mu = U - U_0.$$

La linéarisation du modèle autour du point d'équilibre stable conduit au modèle d'état linéaire et stationnaire

$$\dot{z}(t) = \mathbb{A}z(t) + \mathbb{B}v(t), \text{ où} \quad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \Delta(x_0) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_\alpha \\ J_{\alpha\theta} \sin x_0^1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.3.2.9})$$

$$\text{avec } \Delta(x_0) = \left(J_\alpha J_\theta - J_{\alpha\theta}^2 \sin^2 x_0^1 - x_0^{12} \right)^{-1}$$

$$A_{31} = \Delta(x_0) \left(J_\alpha \gamma_\theta g \sin x_0^1 - 4\Delta(x_0) J_\alpha \gamma_\theta g \cos^2(x_0^1) J_{\alpha\theta}^2 \sin x_0^1 \right),$$

$$A_{32} = \Delta(x_0) \left(-g J_{\alpha\theta} \gamma_\alpha \sin x_0^1 + 4\Delta(x_0) J_\alpha \gamma_\theta g \cos^2(x_0^1) J_{\alpha\theta}^2 \sin x_0^1 \right),$$

$$A_{33} = \Delta(x_0) \left(-(f_A + f_O) J_\alpha + f_A J_{\alpha\theta} \sin x_0^1 \right),$$

$$A_{34} = \Delta(x_0) \left(f_A J_\alpha - f_A J_{\alpha\theta} \sin x_0^1 \right),$$

$$\begin{aligned}
A_{41} &= \Delta(x_0) (J_{\alpha\theta} \gamma_\theta g (\sin^2(x_0^1) - 2\cos^2(x_0^1)) \\
&\quad - 4\Delta(x_0) J_{\alpha\theta} \gamma_\theta g \cos^2(x_0^1) \sin^2(x_0^1)), \\
A_{42} &= \Delta(x_0) (2J_{\alpha\theta} \gamma_\theta g \cos^2(x_0^1) - g \gamma_\alpha J_\theta \\
&\quad + 4\Delta(x_0) J_{\alpha\theta} \gamma_\theta g \cos^2(x_0^1) \sin^2(x_0^1)), \\
A_{43} &= \Delta(x_0) (f_A J_\theta - J_{\alpha\theta} \sin x_0^1 (f_A + f_O)), \\
A_{44} &= \Delta(x_0) (-f_A J_\theta + f_A J_{\alpha\theta} \sin x_0^1).
\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{C}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \begin{bmatrix} \mathbb{B} & \mathbb{A}\mathbb{B} & \mathbb{A}^2\mathbb{B} & \mathbb{A}^3\mathbb{B} \end{bmatrix}$ la matrice de commandabilité. Un calcul analytique de son déterminant (long et fastidieux) a permis de montrer qu'il vaut

$$\Delta(x_0)^4 \gamma_\alpha g (f_A^2 J_{\alpha\theta} \sin x_0^1 - \gamma_\alpha g J_{\alpha\theta}^2 \sin^2(x_0^1) - f_A^2 J_\alpha).$$

En présence de frottement visqueux, la commandabilité est garantie pour toute position d'équilibre tant que la relation $f_A < 2Mh\sqrt{hg}$ est satisfaite. Le cas contraire s'avère être très improbable avec un choix réaliste des paramètres.

Remarque 8. En absence de frottement, on peut vérifier que le déterminant est nul lorsque $x_0^1 = \pm k\pi, \forall k \in \mathbb{N}$. Ainsi, le système est contrôlable partout, sauf lorsqu'il est en position horizontale.

3.3 Résultats de simulation

Les simulations suivantes ont été faites en utilisant MATLAB et Simulink, à l'aide des paramètres suivant : $m = 10 \text{ kg}$, $\mu = 2 \text{ kg}$, $l = 4 \text{ [m]}$, $L = 5 \text{ [m]}$ et $h = 0,5 \text{ [m]}$. Les temps de réaction sont réglés avec $\varepsilon_r = 0,6 \text{ [s]}$ et $\varepsilon_f = 0,3 \text{ [s]}$. Les seuils d'effort sont réglés comme suit : $f_{th+} = 4,475 \text{ [N]}$ et $f_{th-} = -4,475 \text{ [N]}$ (correspondant à un seuil de couple de 22 [Nm]). Le frottement visqueux $f_O = f_A = 0,8 \text{ NM(rad/s)}$. La position initiale du bras du robot est $\theta(0) = \theta_d(0) = -45^\circ$ $\phi(0) = 45^\circ$.

3.3.1 Placement de pôle

Le système linéarisé est stable en boucle ouverte. Il possède deux modes oscillants, chacun caractérisé par une paire de pôles complexes conjugués. Le mode dominant possède une pulsation naturelle $\rho_1 \simeq 1,4 \text{ [rad/s]}$ et un amortissement modal $\xi_1 \simeq 0,027$. Il traduit un mouvement d'oscillation du DDL θ légèrement couplé à une oscillation d'amplitude moyenne du DDL ϕ .

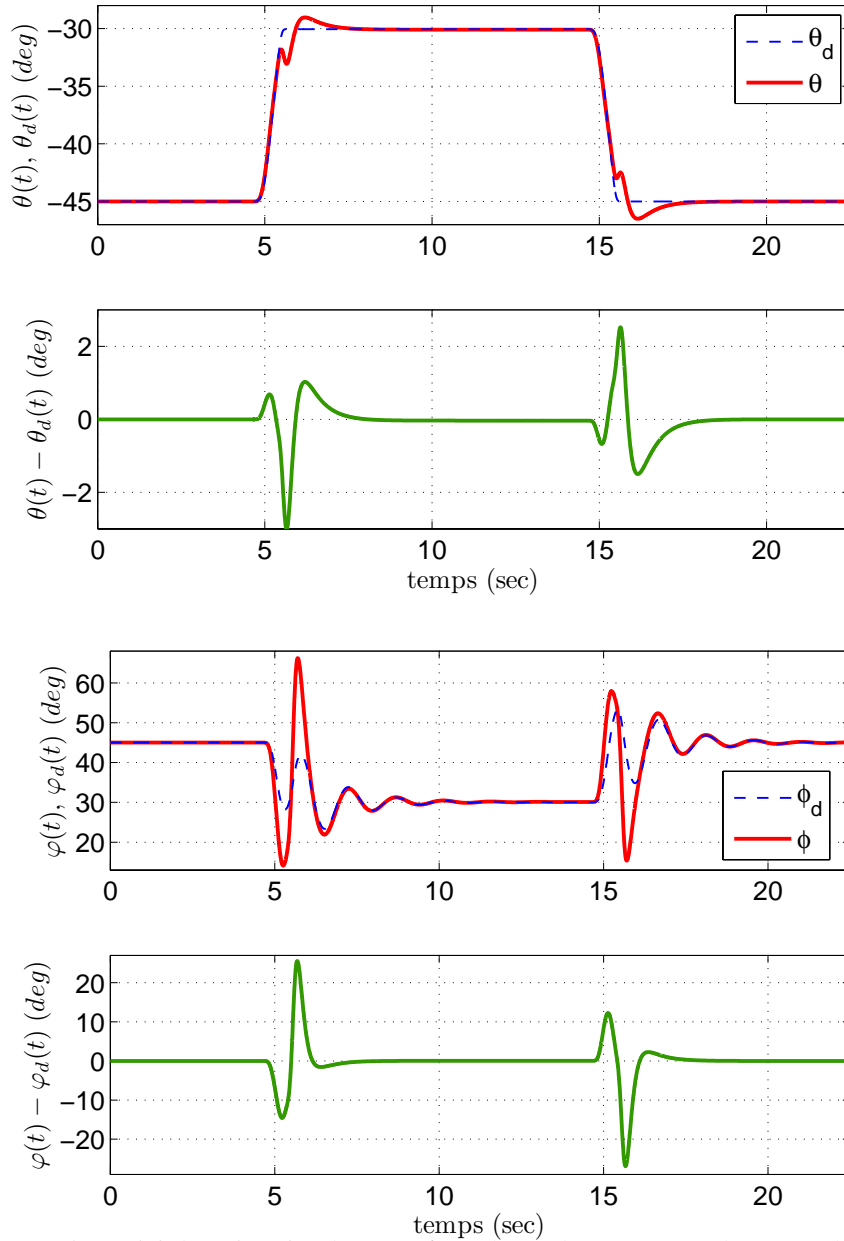


FIGURE 3.5 – Suivi de trajectoire du DDL θ (en haut) du DDL ϕ (en bas) pour le système linéarisé.

Le mode rapide possède une pulsation naturelle $\rho_2 \simeq 4.8 [rad/s]$ et un amortissement modal $\xi_2 \simeq 0.2$. Ce dernier traduit principalement un mode d'oscillation du DDL ϕ et une oscillation du DDL θ de très faible amplitude. Le gain K de la loi de commande (III.3.1.5) est calculé de manière à placer les pôles -2 , -8 , -8.5 et -20 , ce qui garantit une convergence exponentielle avec un taux minimum égal à -2 . Compte tenu des mesures utilisées pour le bouclage (position et vitesse), la loi de commande utilisée pour le correcteur linéaire est équivalente à celle d'un correcteur à action proportionnelle-dérivée sur les seules mesures de position θ et α (ou ϕ). Les simulations de suivi de trajectoire pour la loi de commande obtenue sont présentées par

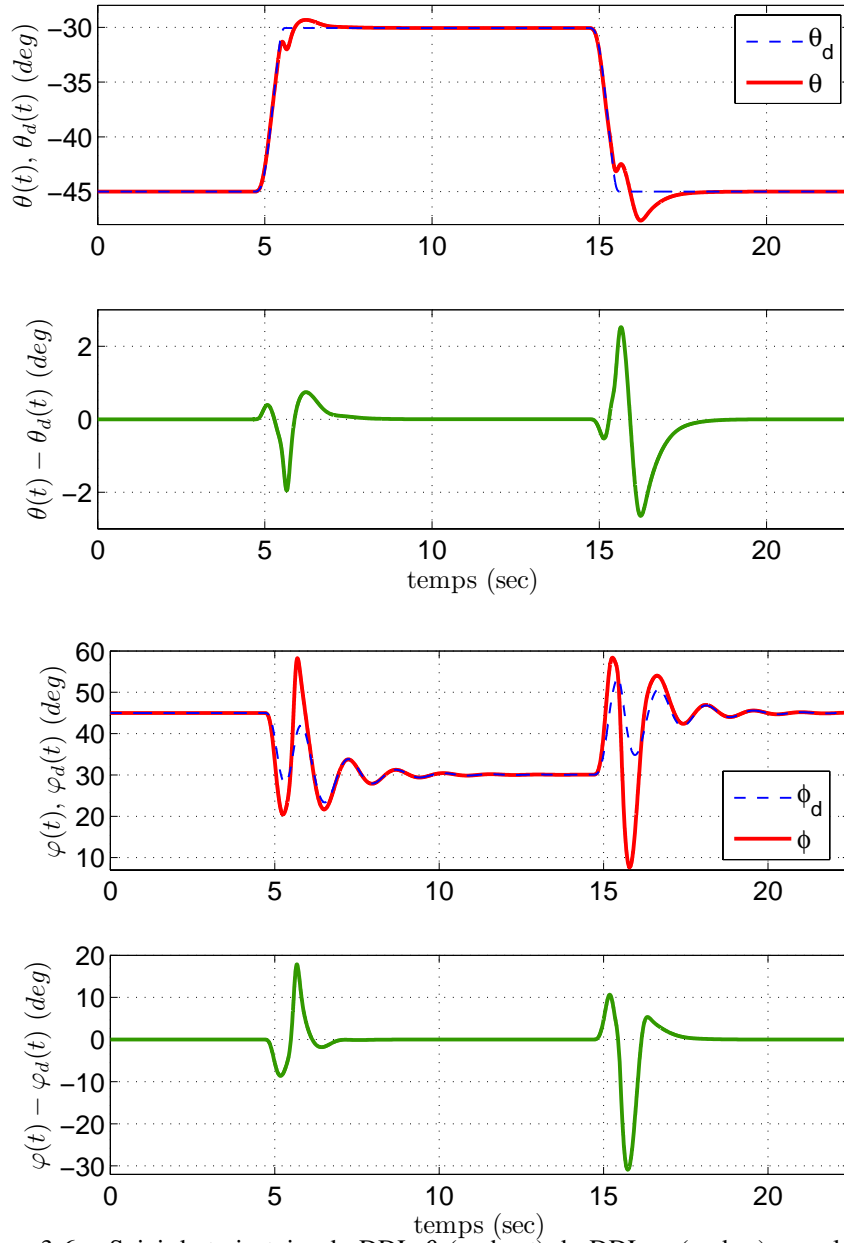


FIGURE 3.6 – Suivi de trajectoire du DDL θ (en haut) du DDL φ (en bas) pour le système non-linéaire.

la Figure 3.5 lorsqu'elle est appliquée au système linéarisé, et par la Figure 3.6 lorsque la loi de commande est appliquée au système non-linéaire. Le couple moteur correspondant est illustré par la Figure 3.7, qui montre que le couple nécessaire pour accomplir la co-manipulation est principalement assuré par les moteurs, vu le couple (petit) appliqué par l'opérateur lors de cette simulation.

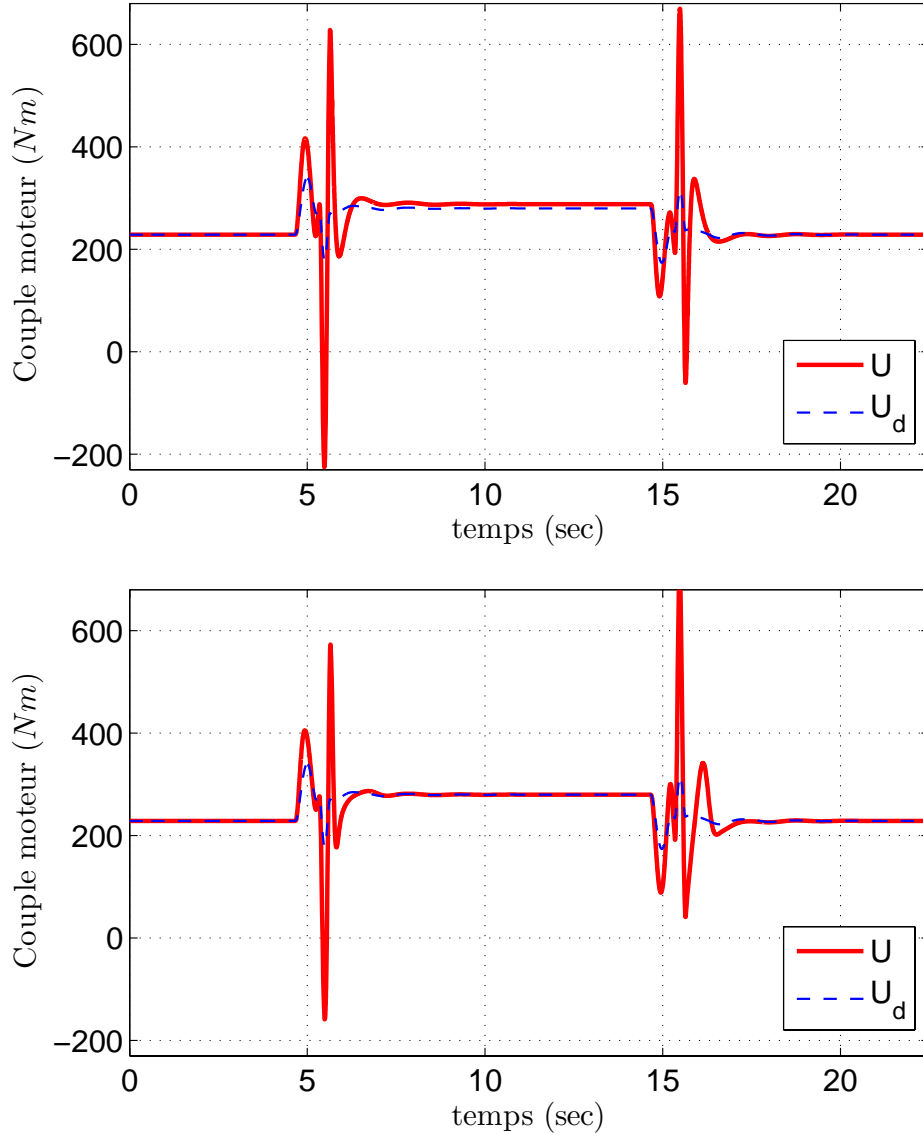


FIGURE 3.7 – Couple moteur $C_m(t)$ durant le suivi de trajectoire : système linéarisé (en haut) et système non-linéaire (en bas).

3.3.2 Commande linéaire quadratique

Le gain $K \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$ de la loi de commande (III.3.1.5) est calculée de manière à résoudre du problème de commande quadratique linéaire tel que soit minimisé le critère :

$$J := \int_0^{+\infty} (\Pi z(t))^T Q (\Pi z(t)) + v(t)^T R v(t) dt, \quad (\text{III.3.3.10})$$

où Π est la matrice de changement de coordonnées entre les variables $\{\theta, \alpha\}$ et $\{\theta, \varphi\}$. La matrice de pondération positive $Q \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, choisie diagonale par block pour pondérer indépendamment θ et φ , est personnalisée pour gérer un compromis acceptable entre les performances de suivi des DDLs θ et φ et de leurs dérivés par rapport au temps. La pondération scalaire

$R > 0$ permet d'ajuster l'effort de commande en boucle fermée. Les simulations proposées ont été effectuées pour deux cas de paramètres de pondération

1. $R_1 = 10^{-9}$ and $Q_1 = \text{diag}\{1, 10^{-11}, 10^{-8}, 10^{-1}\}$: ce choix est effectué afin d'équilibrer les performances de suivi entre le DDL θ et le DDL ϕ . La valeur correspondante du gain par retour d'état est :

$$K_1 = \begin{bmatrix} -3453.8 & 27116 & -34849 & -2979.6 \end{bmatrix},$$

et les simulations associées sont présentées dans la Figure 3.8 .

2. $R_2 = 10^{-9}$ and $Q_2 = \text{diag}\{10^4, 10^{-6}, 10^{-3}, 10^{-3}\}$: ce second cas est effectué afin de souligner les performances de suivi du DDL θ par rapport à ϕ . La valeur correspondante du gain par retour d'état est :

$$K_2 = \begin{bmatrix} 3162100 & 25578 & 45.616 & 15.412 \end{bmatrix}$$

et les simulations associées sont présentées dans la Figure 3.9..

Pour chaque cas du paramètre de pondération, on peut constater que les performances de suivi pour le système non linéaire sont assez semblables à celles du système linéaire. La Figure 3.8. montre que les performances de suivi pour le DDL θ se dégradent au profit de celles du DDL ϕ , tel que prévu par le choix des paramètres de pondération définis en Q_1 . d'autre part, la Figure 3.9. montre une dégradation du suivi pour le DDL ϕ quand le paramètre de pondération souligne le DDL θ au lieu de ϕ , tel que pour Q_2 . Pour ce dernier, le gain par retour d'état contient des valeurs plus élevées et provoque des oscillations plus importantes dans le suivi du DDL ϕ .

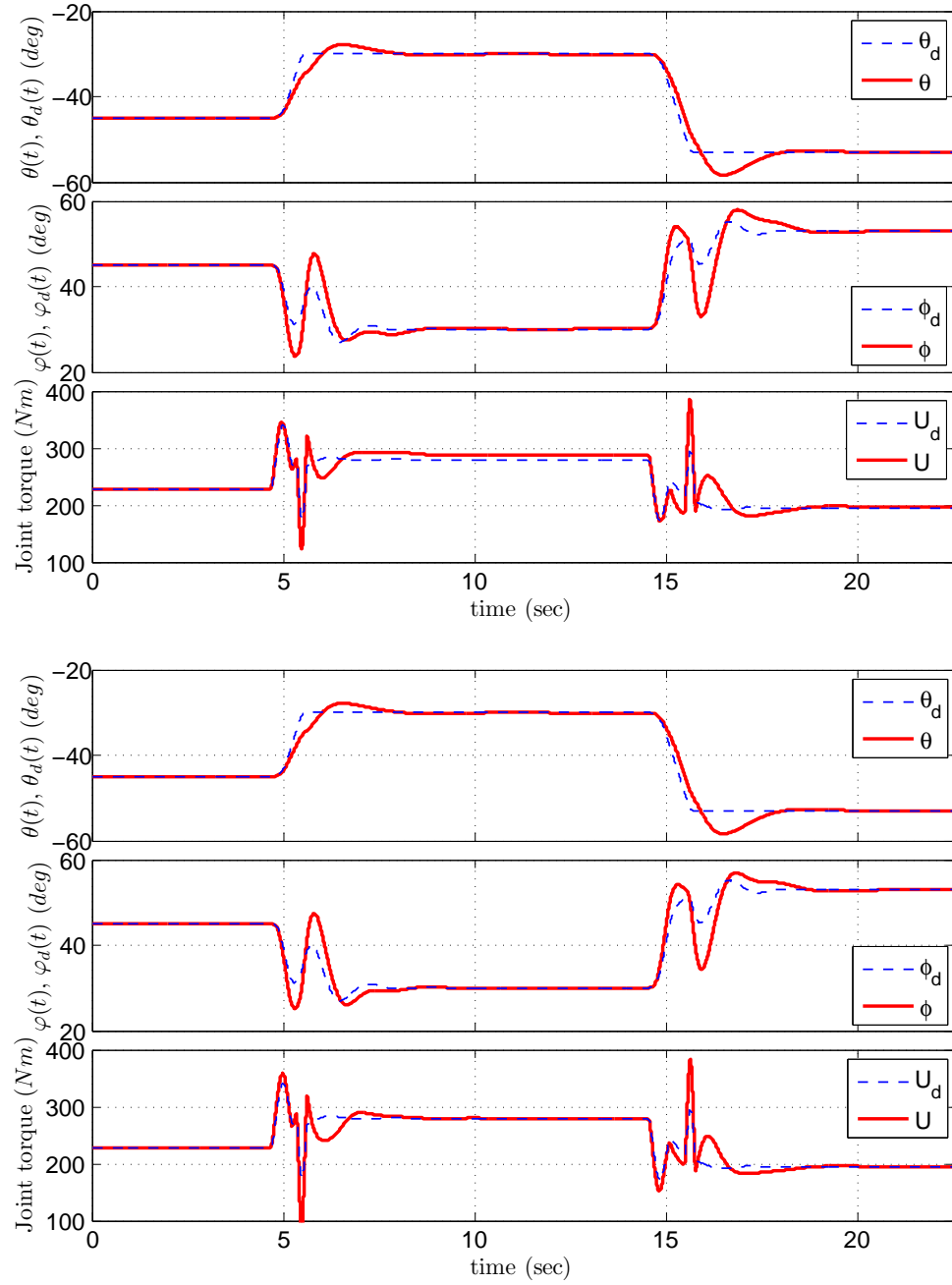


FIGURE 3.8 – Suivi de trajectoire du système linéarisé (en haut) et du système non linéaire (en bas) - Cas des paramètres de pondération (Q_1, R_1) .

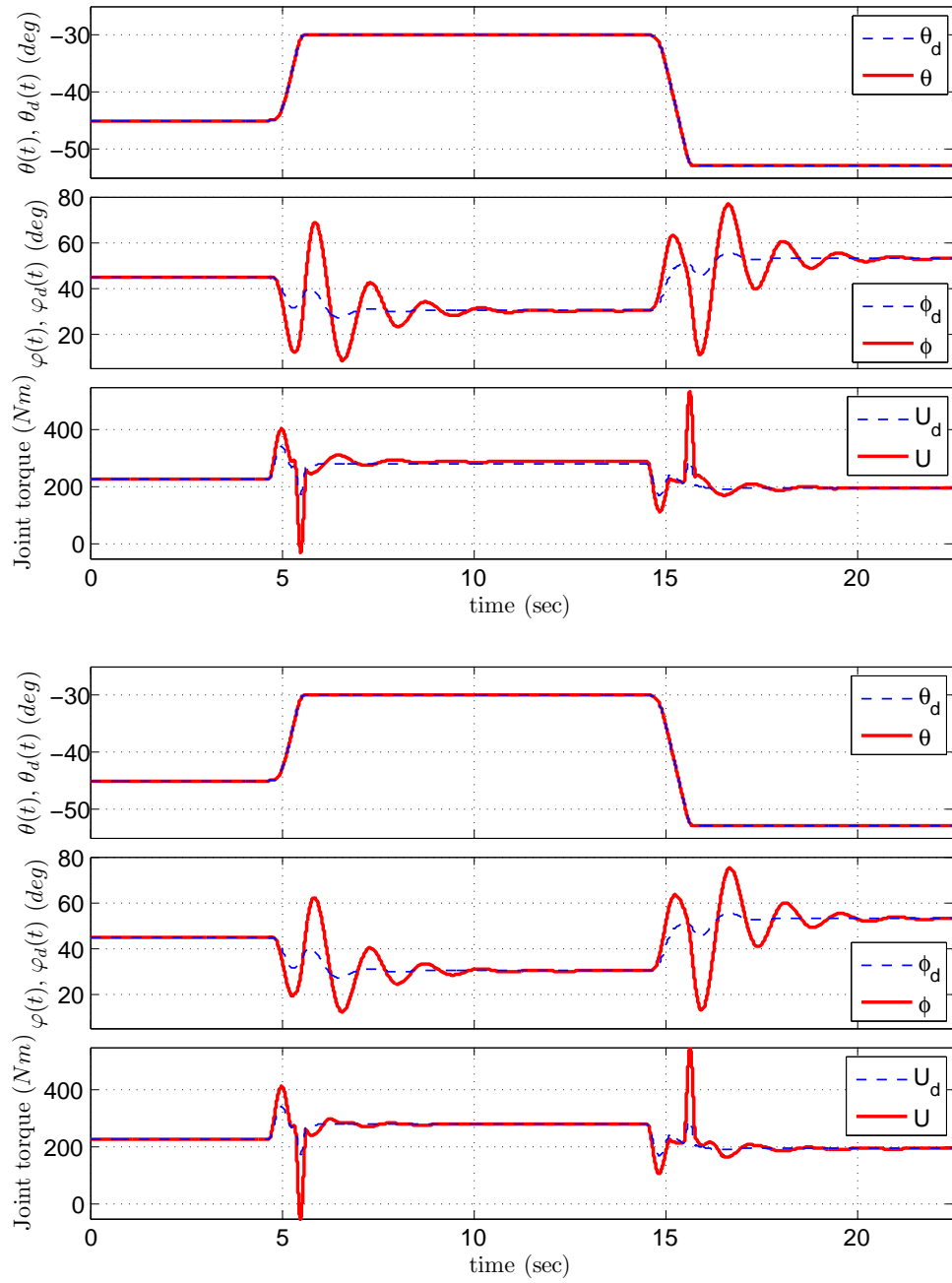


FIGURE 3.9 – Suivi de trajectoire du système linéarisé (en haut) et du système non linéaire (en bas) - Cas des paramètres de pondération (Q_2, R_2) .

Chapitre 4

Contrôle d'impédance modifié

Sommaire

5.1	Introduction	156
5.2	La co-manipulation et les systèmes LPV	157
5.2.1	Les modèles LPV rationnels	158
5.2.2	Représentation descripteur d'un système LPV	158
5.2.3	Système descripteur augmenté pour la commande H_∞	159
5.2.4	Conditions LMI pour la synthèse H_∞	161
5.2.4.1	Formulation	162
5.2.4.2	Synthèse d'une commande par séquençage de gain pour les systèmes LPV descripteur	165
5.2.4.3	Commande H_∞	167
5.3	Application au robot à 2DDLs sans charge pendulaire	168
5.3.1	En absence de frottement	169
5.3.2	Obtention du modèle descripteur affine de la modélisation LFR	175
5.3.3	Système LPV augmenté pour le control H_∞	177
5.3.3.1	Cas du filtre au niveau de la trajectoire désirée	177
5.3.3.2	Cas du filtre au niveau de l'erreur de suivi de trajectoire	179
5.3.4	Détermination du filtre correspondant au cahier de charge	181
5.3.4.1	Marge de robustesse	181
5.3.4.2	Détermination du filtre	182
5.4	Application du théorème 7 pour le synthèse d'un control H_∞	183
5.5	Résultats de simulations	185

L'utilisation du contrôle d'impédance classique dans le cadre de la co-manipulation a montré quelques inconvénients particulièrement visibles lors des phases d'arrêt et de démarrage (cf. Paragraphe 1.3.1). Le recours au contrôle d'impédance variable ajusté en ligne en fonction de l'intention de l'opérateur humain [76–78] permettait de répondre parfaitement au problème de co-manipulation et de résoudre ses problèmes. Cependant, un inconvénient de cette approche est que l'estimation de l'intention de l'homme est effectuée en utilisant la différenciation des signaux de force et de position, ce qui peut être assez bruyant et peut aussi conduire au problème de division par zéro.

Ce chapitre présente une méthode de contrôle d'impédance modifiée qu'on appelle contrôle d'impédance basé sur la génération en ligne de trajectoire (en anglais Online Trajectory-Based Impedance Control (OTBIC)). Cette méthode vise principalement à surmonter ces limites tout en répondant aux attentes de la co-manipulation en termes d'assistance en effort et de transparence en fonctionnement, tout en garantissant la sécurité.

4.1 Formulation du problème

Le but principal de ce chapitre consiste à concevoir une stratégie de commande qui permet à l'opérateur humain de bouger l'organe terminal du robot où il voudrait, à n'importe quel moment qu'il décide, conformément à la relation maître-esclave désirée illustré à la Figure 1.1. Le principe adopté pour répondre à ce problème est décrit par la structure de commande, appelée contrôle d'impédance modifié, représentée dans la Figure 4.1. Dans cette Figure, (x_d, y_d) , (\dot{x}_d, \dot{y}_d) et (\ddot{x}_d, \ddot{y}_d) sont respectivement les coordonnées des vecteurs de position \vec{X}_d , de vitesse $\vec{\dot{X}}_d$ et d'accélération désirés $\vec{\ddot{X}}_d$ de l'organe terminal.

Cette méthode de commande consiste en un générateur en ligne de trajectoire contrôlé par événement, conçu de la manière décrite dans le chapitre 2, associé à une structure classique de contrôle d'impédance permettant un très bon suivi de la trajectoire générée.

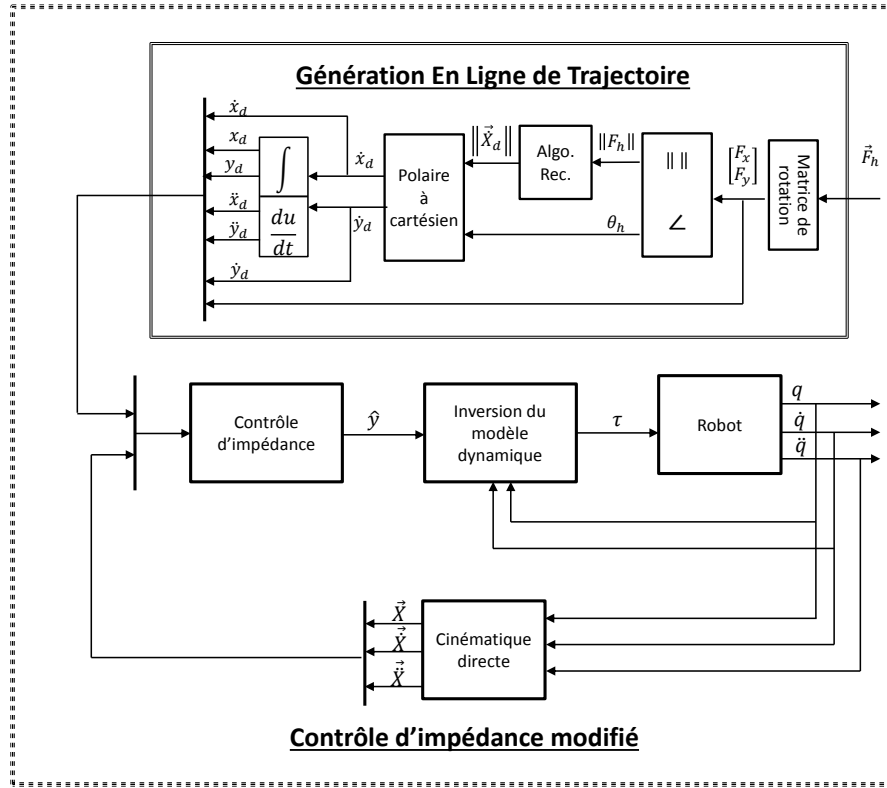


FIGURE 4.1 – Structure du contrôle d'impédance modifié

4.2 Contrôle d'impédance basé sur la génération en ligne de trajectoire

Selon Tamar Flash (1985) [47], l'objectif d'utiliser un contrôleur d'impédance est d'imposer, le long de chaque direction de l'espace des tâches, une relation dynamique désirée entre la position de l'effecteur du manipulateur et la force d'interaction, qui est l'impédance désirée. Généralement, l'impédance désirée est choisie linéaire et du second ordre, comme dans un système masse-ressort-amortisseur. La vitesse de l'effecteur \dot{X} et la force d'interaction F_h sont reliées par l'impédance mécanique Z . Dans le domaine de Laplace,

$$F_h(s) = Z(s)\dot{X}. \quad (\text{III.4.2.1})$$

En termes de position

$$F_h(s) = sZ(s)X(s), \quad (\text{III.4.2.2})$$

où

$$sZ(s) = M_d s^2 + K_d s + K_p, \quad (\text{III.4.2.3})$$

avec M_d , K_d et K_p sont respectivement les matrices d'inertie, de raideur et d'amortissement du système masse-ressort-amortisseur et s est l'opérateur de Laplace.

Une bonne connaissance de la relation géométrique entre les bases de coordonnées est suffisante pour transformer les tenseurs d'une base à une autre. Comme dans [46], désignons par $\mathcal{Y}(q)$ l'inverse de la matrice d'inertie appelé *tenseur de mobilité en coordonnées articulaires*. Les transformations cinématiques entre l'espace articulaire et l'espace des tâches définissent non seulement les relations entre les déplacements généralisés, les flux et les efforts dans les deux bases de coordonnées mais elles définissent aussi la relation entre le moment généralisé dans l'espace articulaire et de tâches à travers le Jacobien. Le tenseur de mobilité exprimé dans l'espace des tâches $\mathcal{W}(q)$ est relié au tenseur de mobilité dans l'espace articulaire $\mathcal{Y}(q)$ comme suit :

$$\mathcal{W}(q) = J(q)\mathcal{Y}(q)J^T(q). \quad (\text{III.4.2.4})$$

Considérons la loi de commande

$$\tau = M(q)\hat{y} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) - J^T F_h, \quad (\text{III.4.2.5})$$

où \hat{y} désigne un nouveau vecteur d'entrée dont l'expression est à déterminer (voir [29]).

En remplaçant l'équation (III.4.2.5) dans (III.1.2.4) (cf. Section 1.2.1), on obtient :

$$M(q)\ddot{q} = M(q)\hat{y},$$

vu que la matrice d'inertie est une matrice invertible, on peut écrire

$$\ddot{q} = \hat{y}.$$

Selon l'équation (III.1.2.3), on écrit

$$\ddot{X} = J\hat{y} + \dot{J}\dot{q}. \quad (\text{III.4.2.6})$$

Soit $\tilde{X} = X_d - X$, l'erreur entre la position actuelle de l'organe terminal et celle désirée exprimées dans l'espace des tâches.

Le contrôle d'impédance de second ordre est défini comme suit :

$$M_d \ddot{\tilde{X}} + K_d \dot{\tilde{X}} + K_p \tilde{X} = JM^{-1} J^T F_h, \quad (\text{III.4.2.7})$$

où $JM^{-1}J^T$, désigne le tenseur de mobilité.

En appliquant les résultats de Bruno Siciliano et Oriolo (2009)[29], l'expression de \hat{y} est comme suit :

$$\hat{y} = J^{-1} M_d^{-1} \left(M_d \ddot{X}_d + K_d \dot{\tilde{X}} + K_p \tilde{X} - M_d J \dot{q} - JM^{-1} J^T F_h \right). \quad (\text{III.4.2.8})$$

4.3 Application au robot à deux bras

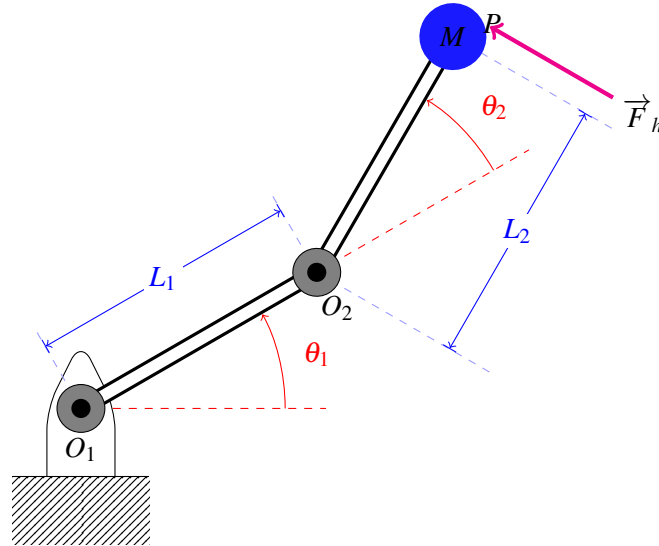


FIGURE 4.2 – Bras double.

Dans cette section, le contrôle d'impédance modifié est appliquée à l'exemple démonstratif du robot à deux bras (cf. Figure 4.2) dont l'architecture mécanique est décrite dans le Chapitre 3. Les angles θ_1 et θ_2 sont définis Figure 4.2. L'extrémité est repérée par le point P où l'opérateur humain conduit le robot et lui applique une force notée \vec{F}_h . Soit q le vecteur de position articulaires défini par :

$$q := \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_1 + \theta_2 \end{bmatrix}.$$

Pour simplifier l'écriture de l'équation de mouvement du robot on note par x le vecteur de positions et de vitesses articulaires :

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}.$$

En introduisant les constantes suivantes : $J_\alpha = \left(\frac{m_1}{3} + m_2 + M\right) L_1^2$, $J_\beta = \left(\frac{m_2}{2} + M\right)$, $J_\gamma = \left(M + \frac{m_2}{3}\right) L_2^2$, $J_\varepsilon = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + M\right) L_1$ et $J_\eta = L_1 L_2$, les caractéristiques de l'équation du mouvement (III.1.2.4) s'écrivent

$$M(q) := \begin{bmatrix} J_\alpha & J_\beta J_\eta \cos(x_{12} - x_{11}) \\ J_\beta J_\eta \cos(x_{12} - x_{11}) & J_\gamma \end{bmatrix} \quad (\text{III.4.3.9})$$

$$C(q) := \begin{bmatrix} 0 & -J_\beta J_\eta \sin(x_{12} - x_{11}) x_{22} \\ J_\beta J_\eta \sin(x_{12} - x_{11}) x_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.4.3.10})$$

$$g(q) := \begin{bmatrix} J_\varepsilon g \cos x_{11} \\ J_\beta L_2 g \cos x_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{III.4.3.11})$$

4.3.1 Adaptation du Générateur de trajectoire au cas du robot à deux bras

Notre point de vue sur la co-manipulation est basé sur le constat que l'unique information permettant d'indiquer au robot la direction de déplacement désirée, mais aussi les phases de mise en mouvement ou d'arrêt du robot, est celle de la mesure de la force de l'opérateur. Cependant, cette mesure pourrait être affectée par des bruits de mesure, ce qui entraîne le générateur de trajectoire de basculer de façon continue entre les différentes phases. Ainsi, le générateur de trajectoire, décrit dans le Chapitre III.2, doit être adapté au problème du robot à deux bras, de manière à éviter ce scénario. Différents seuils de force sont affectés à la direction de rotation de l'organe terminal, qu'on note

- f_{th} : qui permet de distinguer l'intention de l'homme de déplacer le robot si l'amplitude de la force d'interaction est supérieure à f_{th} et la volonté de l'arrêter si l'amplitude de la force est plus faible.
- f_{th-} : qui est le seuil hysteresis, défini afin d'éviter que de petits changements, correspondant aux événements déclencheurs indésirables, d'avoir un quelconque effet.

Ainsi les quantités logiques h_r et h_f sont comme suit :

- h_r passe à 1 lorsque la mesure de la force franchit le seuil f_{th} avec un front montant,
- h_f passe à 1 lorsque la mesure de la force franchit le seuil f_{th-} avec un front descendant.

4.3.2 Résultats de simulation

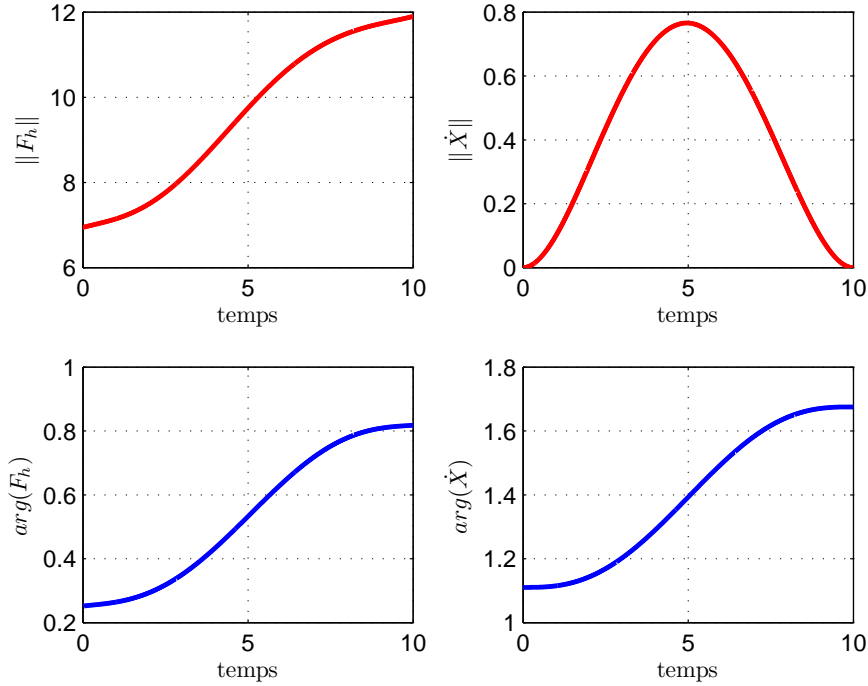
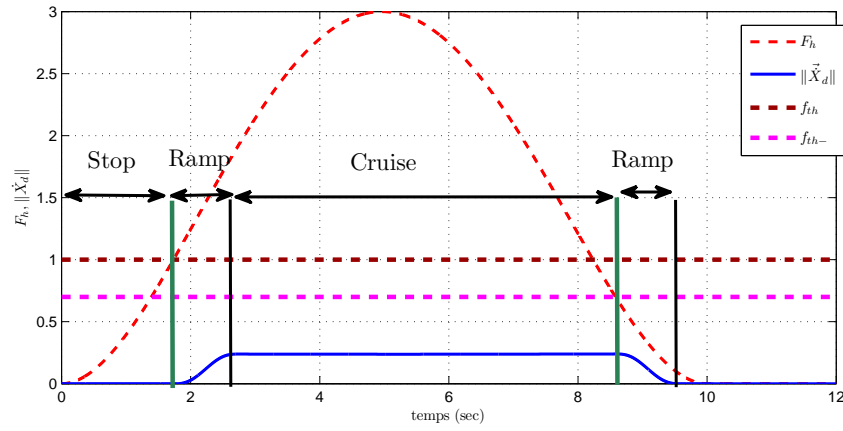


FIGURE 4.3 – Mesure de la force F_h et de la vitesse correspondante de l'organe terminal : cas de la fausse co-manipulation.

Les simulations suivantes ont été faites en utilisant MATLAB et Simulink, à l'aide des paramètres suivant : $m_1 = 10\text{ kg}$, $m_2 = 8\text{ kg}$, $M = 2\text{ kg}$, $L_1 = 5\text{ [m]}$, $L_2 = 4\text{ [m]}$ et $g = 9.81\text{ [m/s}^2\text{]}$. Les temps de réaction sont réglés avec $\varepsilon_r = \varepsilon_f = 0,3\text{ [s]}$. Les seuils d'effort sont réglés comme suit : $f_{th} = 1\text{ [N]}$ et $f_{th-} = 0.75\text{ [N]}$. La position initiale du bras du robot est $q_1(0) = -\pi/3$ $q_2(0) = \pi/18$.

Dans un premier temps, un test "fausse co-manipulation" a été réalisé afin de souligner l'importance du critère de colinéarité. En effet, pour que l'opérateur humain puisse bouger le bras du robot d'une position initiale $q_1^i = -\pi/3$ $q_2^i = \pi/18$ à une position finale $q_1^f = -\pi/6$ $q_2^f = \pi/4$ avec un profil polynomial lisse il a besoin d'appliquer une force dont les caractéristiques (c'est-à-dire norme, orientation) sont affichées dans la Figure 4.3 (à gauche). La vitesse correspondante de l'organe terminal est affichée dans la même Figure (à droite). On peut facilement constater que le critère de colinéarité entre la force et la vitesse n'est en aucun moment vérifié.

FIGURE 4.4 – Profil de la norme de la vitesse désirée, généré par la force F_h .

Pour le cas de la co-manipulation, on a choisit de modéliser un opérateur humain appliquant une force ayant la même direction (orientation) que celle de la fausse co-manipulation, mais avec une amplitude largement inférieure afin de souligner la satisfaction du critère d'assistance c'est-à-dire, c'est au robot de fournir l'effort nécessaire pour déplacer l'objet manipulé, tout en conformant sa position de sorte que son extrémité suive la trajectoire que lui impose l'opérateur. La norme de la force de l'opérateur, ayant une amplitude maximale de $3N$, est affichée dans la Figure 4.4. Sur cette figure sont représentés les seuils de couple ainsi que le profil de la norme de la vitesse de l'effecteur. Pour des raisons d'affichage, on a choisit d'augmenter le temps de réaction à $1s$ afin de distinguer les différentes phases qui se succèdent dans la génération du profil de la norme de la vitesse, durant le traitement de l'information force.

Les simulations de suivi de trajectoire pour la loi de commande, définie dans la Section 4.2, montrent la réalisation d'un bon suivi.

La Figure 4.5 affiche le suivi de trajectoire de la position de l'organe terminal, on voit bien la réalisation d'un bon suivi. Le suivi du profil de vitesse ainsi que celui de l'accélération sont représentés respectivement dans la Figure 4.6 et la Figure 4.7. Les erreurs de suivi de position, vitesse et d'accélération sont schématisées respectivement dans les Figures 4.8, 4.9 et 4.10. On peut observer que ce sont des erreurs très négligeables. Les couples moteurs durant cette tâche de co-manipulation sont illustrés dans la Figure 4.11. On peut constater que le couple nécessaire à la co-manipulation est principalement assuré par les moteurs, étant donnée le niveau du couple appliqué par l'opérateur humain durant cette simulation (maximum $3N$).

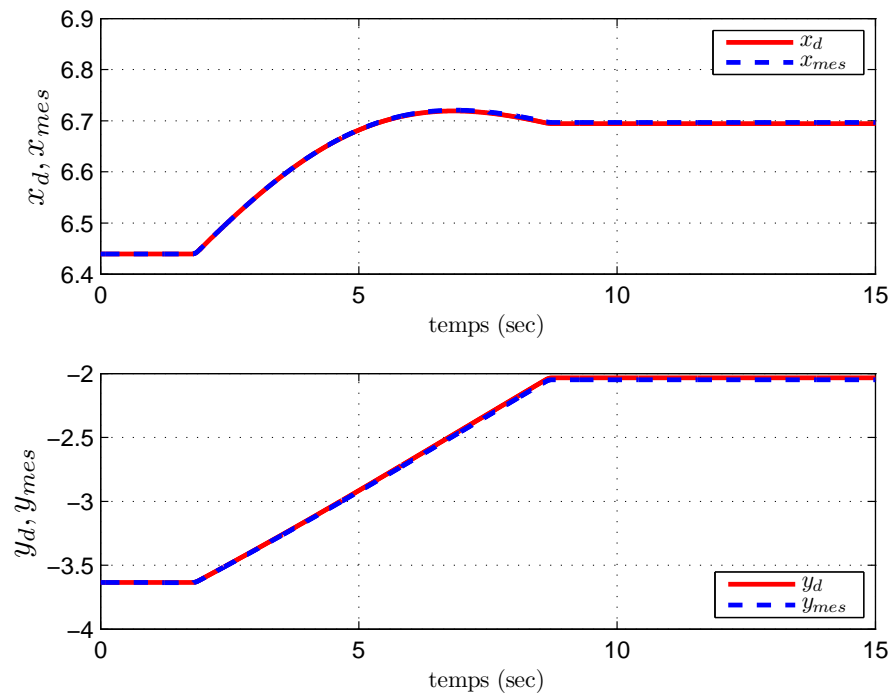


FIGURE 4.5 – Suivi de position.

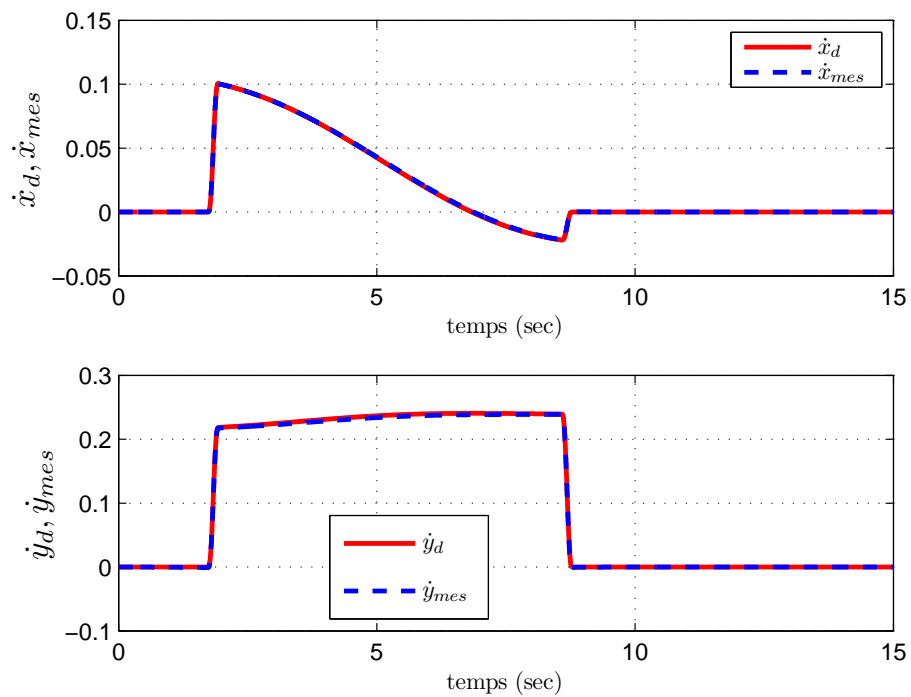


FIGURE 4.6 – Suivi de vitesse.

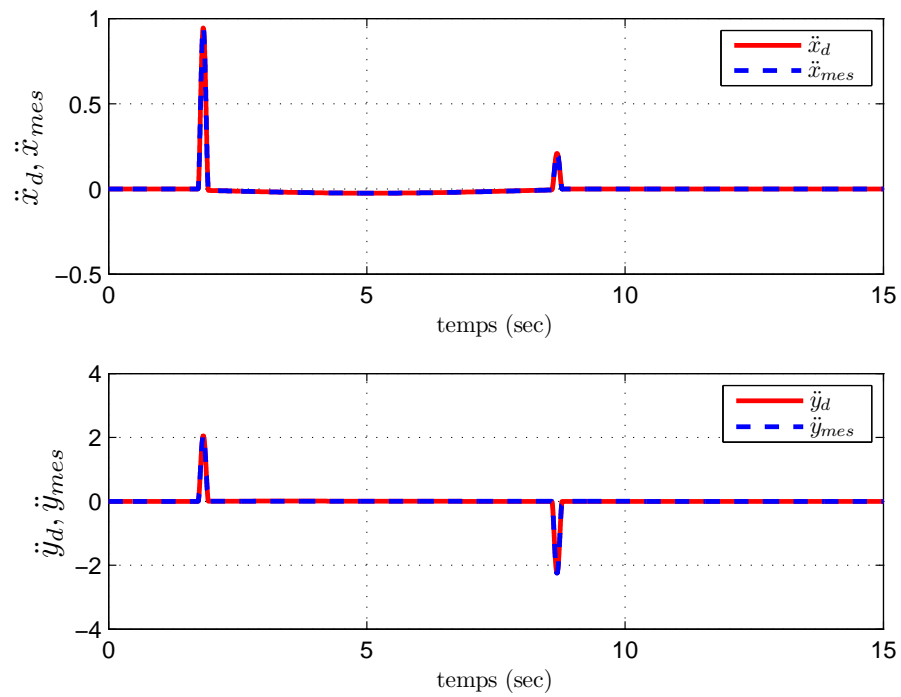


FIGURE 4.7 – Suivi d'accélération.

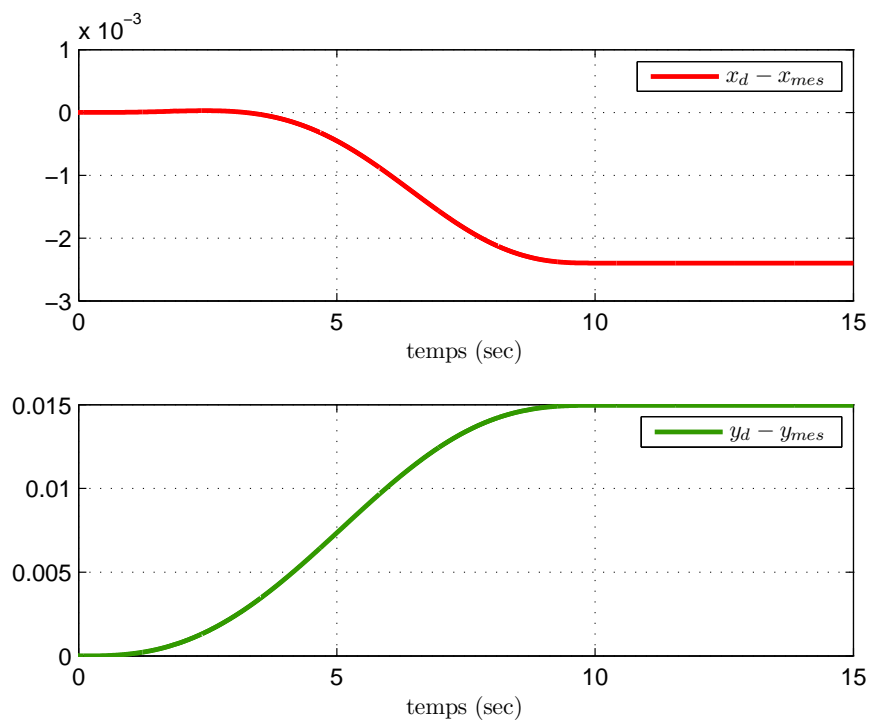


FIGURE 4.8 – Erreur de suivi de position.

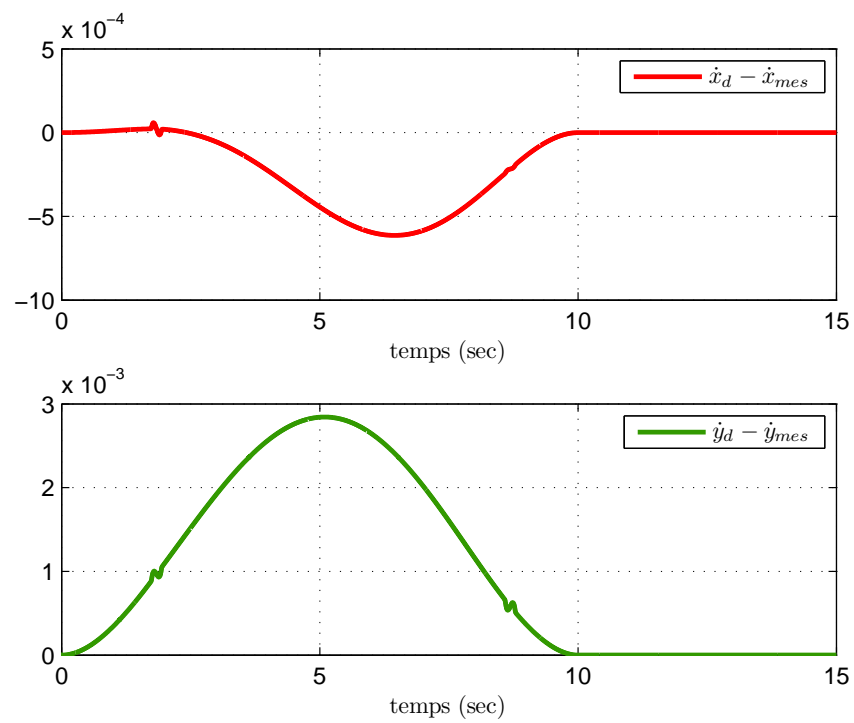


FIGURE 4.9 – Erreur de suivi de vitesse.

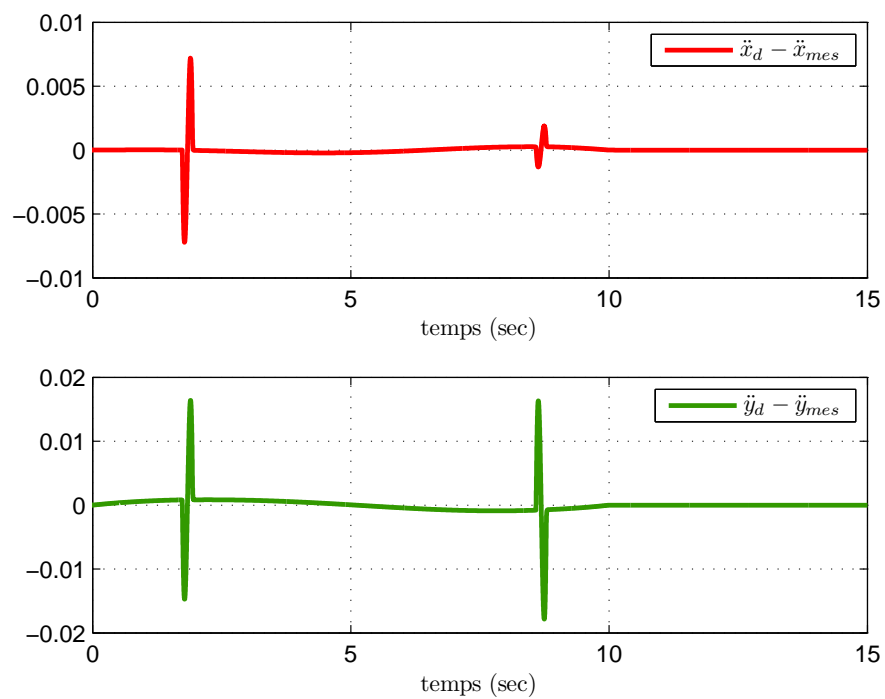
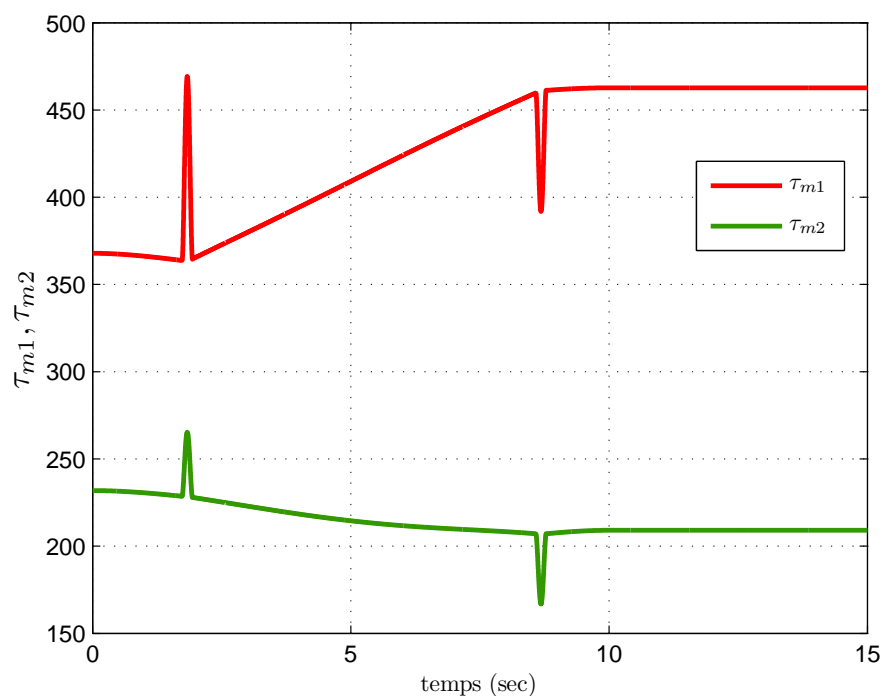
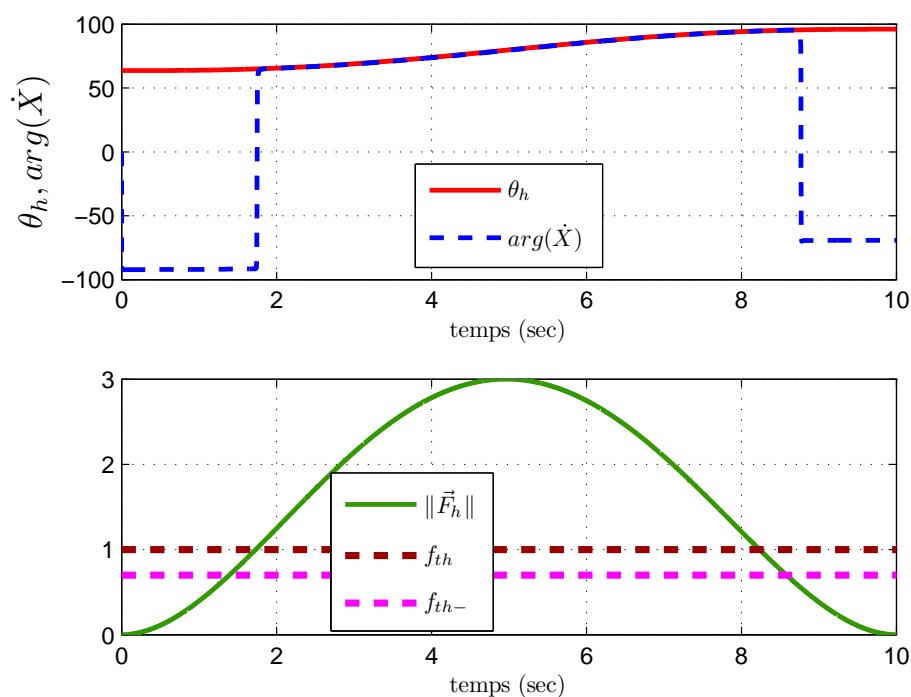


FIGURE 4.10 – Erreur de suivi d'accélération.

FIGURE 4.11 – Couple moteur τ_{m1} et τ_{m2} durant le suivi de trajectoire.FIGURE 4.12 – Colinéarité entre la force de l'opérateur \vec{F}_h et la vitesse de l'organe terminal $\vec{\dot{X}}$.

La Figure 4.12 met en évidence l'accomplissement de l'exigence de colinéarité entre la force et la vitesse. Cette colinéarité est bien évidemment observée lors de la phase de mouvement : dès que la norme de la force de l'opérateur (vert) coupe le seuil montant (tiret-marron), la vitesse de l'effecteur suit rapidement l'orientation de la force et elle y reste parfaitement colinéaire jusqu'au moment de déclenchement de la phase d'arrêt.

Chapitre 5

Synthèse d'une commande LPV pour le problème de co-manipulation basé sur les conditions LMI

5.1 Introduction

Au cours de ces deux dernières décennies, l'analyse et le contrôle des systèmes linéaires à paramètres variants (LPV) ont présenté un vaste sujet de recherche, qui a suscité un nombre important de travaux, tant sur le plan théorique que celui des applications. L'idée principale de ce chapitre est de bénéficier des dernières avancées de la théorie de commande LPV afin de proposer une méthode générique permettant de résoudre le problème de co-manipulation robotique.

Tel que formulée dans les chapitres précédents, la co-manipulation pour des tâches de maintenance de charges lourdes peut être vue comme un problème classique de manipulation robotique associé au générateur de trajectoire spécifique développé dans le Chapitre 2. Les travaux pionniers d'Adams et al. [15], exploités récemment par Halalchi et al. [16, 17], traitant les problèmes de modélisation et de commande LPV des robots, ont montré leur efficacité dans le cadre de manipulation robotique. Ce choix de modélisation, permet la synthèse de lois de commande avec des garanties préalables de performance et de robustesse. En se basant sur ces résultats, nous introduisons la modélisation quasi-LPV des robots en interaction avec un opérateur humain. Les fondements de cette stratégie de commande ont été rappelés dans l'Annexe E.

Notons bien que dans ce chapitre nous explorons une piste non exploitée dans la littérature scientifique pour le cadre de la co-manipulation, qui consiste à formuler ce problème à l'aide des techniques de la commande LPV.

5.2 La co-manipulation et les systèmes LPV

Rappelons l'équation générale d'un robot en interaction avec un opérateur humain, donnée par

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = U, \quad (\text{III.5.2.1})$$

où $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ et $\ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ correspondent respectivement aux vecteurs des vitesses et des accélérations. Le vecteur des commandes est donné par $U = \tau + W_f$, τ correspond au vecteur des couples appliqués aux DDLs, résultant de l'action de l'opérateur ainsi que des moteurs du robot. $W_f \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des frottement (visqueux, sec). $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$ est la matrice des termes d'inertie, $C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur contenant les forces centrifuges et de Coriolis, $g(q) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de forces dues à la gravité.

Notre formulation du problème de co-manipulation a permis de le voir comme la combinaison de deux sous problèmes : un problème classique de manipulation robotique associé à un générateur de trajectoire spécifique permettant de générer une trajectoire appropriée, répondant aux attentes du manipulateur en termes de déplacement désiré, d'assistance en effort et de transparence en fonctionnement, tout en garantissant sa sécurité. Ainsi, le modèle non-linéaire (III.5.2.1) peut être reformulé sous la forme LPV, en définissant un vecteur de paramètres variants qui sont fonction de la position et la vitesse des articulations. Cette formulation s'appelle aussi formulation "quasi-LPV" puisque le vecteur des paramètres variants est une fonction des variables d'état mesurées du système [96].

En considérant un modèle partiellement linéarisé où les forces de Coriolis et de la gravité sont censés être compensées par la commande, par exemple en utilisant des techniques de linéarisation par rétroaction [18], les équations dynamiques (III.5.2.1) conduisent à un système LPV rationnel dû à l'inversion de la matrice d'inertie $M(q)$. Ce modèle LPV rationnel entraîne certains problèmes d'implémentation lors de la résolution des LMIs pour le synthèse d'une commande avec conservatisme réduit.

Pour se distinguer des travaux traitant la modélisation *quasi-LPV*, on va procéder dans ce chapitre à considérer uniquement la compensation du terme de gravité, les forces de Coriolis vont

faire partie du modèle non-linéaire lors de la représentation linéaire fractionnaire (LFR) du système (voir Annexe.E).

5.2.1 Les modèles LPV rationnels

Les modèles LPV rationnels sont décrits comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_r = A_r(\rho)x + B_r(\rho)u \\ y = C_r(\rho)x_r(t) \end{cases} \quad (\text{III.5.2.2})$$

tel que $A_r(\rho)$, $B_r(\rho)$ et $C_r(\rho)$ sont des fonctions rationnelles du vecteur des paramètres variant $\rho(t)$. Une représentation naturelle de cette classe de système est la Représentation Linéaire Fractionnaire présentée dans l'annexe.E :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad v(t) = \Delta(\rho)z(t), \quad (\text{III.5.2.3})$$

tel que $x_r(t) \in \mathbb{R}^r$ est l'état, $v(t) \in \mathbb{R}^{n_v}$ est l'entrée externe, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur des signaux de commande, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ est le vecteur des signaux de sorties à contrôler et $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est le vecteur des signaux de sortie mesurées.

Ce modèle LPV rationnel a été décrit dans [97]. Cette dépendance rationnelle entraîne certains problèmes d'implémentation lors de la résolution des LMIs pour le synthèse d'une commande avec conservatisme réduit. La dépendance rationnelle va être éliminée par le biais de la représentation en système descripteur.

5.2.2 Représentation descripteur d'un système LPV

Tout Système LPV rationnel peut être formulé sous la forme d'un système descripteur affine [98]. En définissant un vecteur d'état augmenté $x(t) \in \mathbb{R}^n$ qui est le vecteur des variables descripteur. La représentation LPV descripteur est définie comme suit

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) \\ y = C(\rho(t))x(t) \end{cases}, \quad (\text{III.5.2.4})$$

où $A(\rho(t))$, $B(\rho(t))$ et $C(\rho(t))$ sont des fonctions affines du vecteur des paramètres $\rho(t)$.

Le vecteur descripteur x est construit en concaténant le vecteur d'état rationnel $x_r(t)$ et le vecteur de variables supplémentaires $\tilde{x}_2(t)$, de sorte que $x(t) = \begin{bmatrix} x_r^T(t) & \tilde{x}_2^T(t) \end{bmatrix}$. On remarque bien que la matrice E doit être singulière. Bouali et al dans [99] ont montré que le système LPV rationnel peut se réécrire sous la forme descripteur et ceci avec $E = \text{diag}(I_r, 0_{n-r})$.

La transition du système LPV rationnel au système descripteur se fait par deux méthodes :

- la méthode "ad-hoc"
- la méthode "systématique".

Dans ce qui suit je vais développer la méthode systématique basée sur la représentation LFR décrite auparavant.

De l'équation (III.5.2.3) on a

$$v(t) = \Delta(\rho)M_{31}x_r(t) + \Delta(\rho)M_{32}u(t) + \Delta(\rho)M_{33}v(t), \quad (\text{III.5.2.5})$$

en définissant le vecteur d'état augmenté $x(t) = \begin{bmatrix} x_r(t)^T & v(t)^T & u(t)^T \end{bmatrix}$ tel que dans [16], ceci permettra d'obtenir la représentation descripteur affine où B est une matrice constante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0_{n_v} \\ 0_{n_u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{13} & M_{12} \\ \Delta(\rho)M_{31} & \Delta(\rho)M_{33} - \mathbb{I}_{n_v} & \Delta(\rho)M_{32} \\ 0_r & 0_{n_v} & -\mathbb{I}_{n_u} \end{bmatrix} x_d + \begin{bmatrix} M_{12} \\ 0_{n_v} \\ \mathbb{I}_{n_u} \end{bmatrix} \tilde{u}, \quad (\text{III.5.2.6})$$

Remarque 9. Le choix du vecteur d'état descripteur n'est pas unique, on peut aussi prendre $x(t) = \begin{bmatrix} x_r(t)^T & v(t)^T \end{bmatrix}$. Ceci doit permettre l'écriture descripteur du système avec $E = \text{diag}(I_r, 0_{n_v})$.

5.2.3 Système descripteur augmenté pour la commande H_∞

Après avoir écrit le système sous la forme descripteur, on doit définir la forme descripteur augmentée avec une performance $w(t) \rightarrow z(t)$ tel que w est l'entrée externe et z est la sortie du correcteur :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} E_1 \dot{x}(t) = A_1(\rho)x(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t), \\ z(t) = C_1 x(t), \\ y(t) = C_2 x(t). \end{cases} \quad (\text{III.5.2.7})$$

La synthèse du régulateur basée sur les LMI, se base sur les résultats de Masubuchi et al [98],[100] ainsi que les résultats de Scherer [101]. Le problème de synthèse consiste en la

conception d'un contrôleur LPV $K(s, \rho)$ qui minimise le gain L_2 . En effet, il consiste à calculer une loi de commande avec retour de sorties comme suit :

$$(\mathcal{C}) \begin{cases} E_c \dot{x}_c(t) = A_c(\rho)x_c(t) + B_c y(t), \\ u(t) = C_c x_c(t), \end{cases} \quad (\text{III.5.2.8})$$

tel que $x_c(t) \in \mathbb{R}^n$. Le système en boucle fermée est donné par

$$(\mathcal{S}_{cl}) \begin{cases} E_{cl} \dot{x}_{cl}(t) = A_{cl}(\rho)x_{cl}(t) + B_{cl}w(t), \\ z(t) = C_{cl}x_{cl}(t), \end{cases} \quad (\text{III.5.2.9})$$

avec

$$\begin{aligned} x_{cl}(t) &= \begin{bmatrix} x(t)^T & x_c(t)^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n+n_c} \text{ et} \\ E_{cl} &= \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_c \end{bmatrix}, \quad A_{cl} = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}, \\ B_{cl} &= \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{cl} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous présentons des inégalités matricielle (cf. [102, 103]) caractérisant quelques propriétés des systèmes descripteurs décrits par l'équation (III.5.2.4).

Définition 6. – un faisceau $sE - A$ (ou une paire (E, A)) est dit régulier si $\det(sE - A) \neq 0$ $\forall s \in \mathbb{C}$.

– pour un faisceau régulier $sE - A$, les valeurs propres finies sont dites les modes finies de (E, A) .

Supposons que $E v_1 = 0$ alors les valeurs propres infinies associées aux principaux vecteurs généralisés v_k satisfaisant $E v_k = A v_{k-1}$, $k = 2, 3, 4, \dots$ sont les modes impulsifs de (E, A) .

– une paire (E, A) est admissible si elle est régulière et n'a ni des modes impulsifs, ni des modes finis instables.

– Le système descripteur est dit stable si les modes finis sont stables, c'est-à-dire si les valeurs propres finies de (E, A) se situent dans le demi-plan ouvert gauche. Les modes impulsifs peuvent causer des termes d'impulsion dans la réponse et sont donc à proscrire. Un système n'ayant pas de modes impulsifs est dit d'impulsion libre si seulement si

$$\deg(\det(sE - A)) = \text{rang} E.$$

On dit que le système descripteur (III.5.2.9) est admissible si le faisceau $sE_{cl} - A_{cl}$ est régulier, d'impulsion libre et n'a aucun mode instable.

Soit $G_{cl} = C_{cl} (sE_{cl} - A_{cl})^{-1} B_{cl}$. La condition de la norme H_∞ ainsi que l'admissibilité sont données dans [102].

Lemme 1. *les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. le système descripteur (III.5.2.9) est admissible et $\|G_{cl}\|_\infty < \gamma$.
2. Il existe une matrice $X_{cl} \in \mathbb{R}^{n+n_c}$ tel que

$$\begin{aligned} E_{cl}^T X_{cl} &= X_{cl}^T E_{cl} \geq 0, \\ \begin{bmatrix} A_{cl}^T X_{cl} + X_{cl}^T A_{cl} + E_{cl}^T \dot{X}_{cl} & X_{cl}^T B_{cl} & C_{cl}^T \\ * & -\gamma \mathbb{I} & 0 \\ * & * & -\gamma \mathbb{I} \end{bmatrix} &< 0. \end{aligned} \quad (\text{III.5.2.10})$$

3. Il existe une matrice $Y_{cl} \in \mathbb{R}^{n+n_c}$ tel que

$$\begin{aligned} E_{cl}^T Y_{cl} &= Y_{cl}^T E_{cl} \geq 0, \\ \begin{bmatrix} A_{cl} Y_{cl}^T + Y_{cl} A_{cl}^T - E_{cl} \dot{Y}_{cl}^T & Y_{cl} C_{cl}^T & B_{cl} \\ * & -\gamma \mathbb{I} & 0 \\ * & * & -\gamma \mathbb{I} \end{bmatrix} &< 0. \end{aligned} \quad (\text{III.5.2.11})$$

Si ces conditions sont vérifiées, $sE_{cl} - A_{cl}(\rho)$ est régulier et d'impulsion libre pour chaque $\rho \in \Theta$ et le gain L_2 du système en boucle fermé est inférieur à γ .

5.2.4 Conditions LMI pour la synthèse H_∞

La problématique de la synthèse de commande consiste à trouver un correcteur LPV descripteur K qui minimise un scalaire positif γ de manière à ce que la norme H_∞ du canal de performance $w \rightarrow z$ soit minimisé (idéalement inférieur à 1) pour toute valeur de δ . Le système descripteur étant affine vis-à-vis de δ , la construction d'un correcteur LPV descripteur de forme polytopique est possible si la matrice E est inversible. Or, dans notre cas d'étude cette dernière est singulière représentant en soit une problématique pour l'utilisation des conditions LMIs issues de la théorie LPV/ H_∞ classique.

Un des résultats proposés pour la résolution d'un tel problème lorsque la matrice E est singulière est le fruit des travaux de recherche menée par Izumi Masubuchi [98, 100, 102].

Selon Masubshi et al. dans [98], il existe des conditions suffisantes permettant de construire un correcteur séquencé à partir d'un modèle LPV descripteur possédant une matrice E non inversible. La résolution des conditions LMIs peut être réalisée sur les sommets d'un polytope formé par les bornes des paramètres variants. Soient les variables de décision des LMI $p = \{ \chi, Y, F, G, H \}$, χ et Y peuvent être choisies constantes ou dépendantes des paramètres variants. Cependant, pour assurer la stabilité globale à chaque sommet du polytope, ces matrices doivent être constantes. Cette considération est prise en compte dans notre étude.

5.2.4.1 Formulation

Considérons les systèmes LPV sous la forme d'espace d'état. Soit $\rho(t)$ le paramètre variant. On suppose que $\rho(t)$ est continûment différentiable et appartient à un ensemble $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, et $\dot{\rho} \in \omega \subset \mathbb{R}^k$.

L'équation d'état est donnée par

$$\begin{cases} \dot{x}_s(t) = A_s(\rho)x_s(t) + B_{1s}(\rho)w(t) + B_{2s}(\rho)u(t), \\ z(t) = C_{1s}(\rho)x_s(t) + D_{11s}(\rho)w(t) + D_{12s}(\rho)u(t), \\ y(t) = C_{2s}(\rho)x_s(t) + D_{21s}(\rho)w(t), \end{cases} \quad (\text{III.5.2.12})$$

tel que $x_s(t) \in \mathbb{R}^r$ est l'état, $w(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ est l'entrée externe, $u(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$ est l'entrée de commande et $y(t) \in \mathbb{R}^{p_2}$ est la sortie mesurée.

Considérons la loi de commande avec retour de sorties

$$\begin{cases} \dot{x}_{cs}(t) = A_{cs}(\rho)x_{cs}(t) + B_{cs}y(t), \\ u(t) = C_{cs}x_{cs}(t), \end{cases} \quad (\text{III.5.2.13})$$

tel que $x_{cs}(t) \in \mathbb{R}^r$. Le système en boucle fermé est

$$\begin{cases} \dot{x}_{cls}(t) = A_{cls}(\rho)x_{cls}(t) + B_{cls}w(t), \\ z(t) = C_{cls}x_{cls}(t) + D_{cls}w(t), \end{cases} \quad (\text{III.5.2.14})$$

avec $x_{cls} = \begin{bmatrix} x_s^T(t) & x_{cs}^T \end{bmatrix}^T$ et

$$\begin{aligned} A_{cls} &= \begin{bmatrix} A_s & B_{2s}C_{cs} \\ B_{cs}C_{2s} & A_{cs} \end{bmatrix}, & B_{cls} &= \begin{bmatrix} B_{1s} \\ B_{cs}D_{21s} \end{bmatrix} \\ C_{cls} &= \begin{bmatrix} C_{1s} & D_{12s}C_{cs} \end{bmatrix}, & D_{cls} &= D_{11s} \end{aligned} \quad (\text{III.5.2.15})$$

Si les coefficients des matrices ont une dépendance rationnelle en le paramètre ρ alors, le système LPV peut être mis sous la forme descripteur :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + B_1w(t) + B_2u(t), \\ z(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t), \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}w(t), \end{cases} \quad (\text{III.5.2.16})$$

tel que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est la variable descripteur. En réalisant la partition suivante

$$E = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_r \\ x_{n-r} \end{bmatrix} \quad (\text{III.5.2.17})$$

et

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ \hline C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c|c} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{21} \\ A_{21} & A_{22} & B_{12} & B_{22} \\ \hline C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} & D_{21} & 0 \end{array} \right]. \quad (\text{III.5.2.18})$$

Selon cette partition de E et de x on écrit

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ x_{n-r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix} u, \\
 z &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ x_{n-r} \end{bmatrix} + D_{11} \omega + D_{12} u, \\
 y &= \begin{bmatrix} C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ x_{n-r} \end{bmatrix} + D_{21} \omega.
 \end{aligned} \tag{III.5.2.19}$$

un simple calcul donne

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ z \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & B_{21} \\ C_{11} & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ \omega \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{12} \\ C_{12} \\ C_{22} \end{bmatrix} x_{n-r}, \\
 \text{avec } x_{n-r} &= - \begin{bmatrix} A_{12} \\ C_{12} \\ C_{22} \end{bmatrix} A_{22}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & B_{12} & B_{22} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{III.5.2.20}$$

Les coefficients de la matrice du système LPV sous forme d'état et celle du système LPV descripteur sont reliés alors par

$$\begin{bmatrix} A_s & B_{1s} & B_{2s} \\ C_{1s} & D_{11s} & D_{12s} \\ C_{2s} & D_{21s} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & B_{21} \\ C_{11} & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & D_{21} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{12} \\ C_{12} \\ C_{22} \end{bmatrix} A_{22}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} \tag{III.5.2.21}$$

Cette transformation est réalisable sous réserve de satisfaire les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} B_{12} &= 0, C_{12} = 0, \\ B_{22} &= 0 \quad \text{ou} \quad C_{22} = 0. \end{aligned} \tag{III.5.2.22}$$

5.2.4.2 Synthèse d'une commande par séquençement de gain pour les systèmes LPV descripteur

Dans cette sous section, on se base sur la méthode de synthèse d'une commande par séquençement de gain pour les systèmes LPV descripteur (voir équation (III.5.2.16)), présenté par Masubuchi et al.[100].

Soient les variables de décision des LMI $p = \{ \chi, Y, F, G, H \}$, telles que $\chi, Y, H \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ et $G \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$.

Désignons par

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & 0 \\ \chi_{21} & \chi_{22} \end{bmatrix}, \quad \chi_{11} = \chi_{11}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \tag{III.5.2.23}$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ 0 & Y_{22} \end{bmatrix}, \quad Y_{11} = Y_{11}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \tag{III.5.2.24}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, \quad F_1 \in \mathbb{R}^{n \times n_u}, \tag{III.5.2.25}$$

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \end{bmatrix}, \quad G_1 \in \mathbb{R}^{n_u \times n}, \tag{III.5.2.26}$$

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{21} \\ & & H_{22} \end{bmatrix}, \quad H_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \tag{III.5.2.27}$$

En outre, soient les matrices suivantes :

$$M_p = \begin{bmatrix} YE^T & E \\ E^T & E^T \chi \end{bmatrix}, \quad (\text{III.5.2.28})$$

$$M_p^d = \begin{bmatrix} -\frac{d}{dt}(YE^T) & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt}(E^T \chi) \end{bmatrix}, \quad (\text{III.5.2.29})$$

$$M_A = \begin{bmatrix} A_1(\rho)Y^T + B_2F^T & A_1(\rho) \\ H^T & \chi^T A_1(\rho) + G^T C_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{III.5.2.30})$$

$$M_B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \chi^T B_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{III.5.2.31})$$

$$M_c = [C_1 Y^T]. \quad (\text{III.5.2.32})$$

Théorème 7. *Le système en boucle fermée est stable ayant un indice de performance inférieure à un scalaire positif γ si les LMI suivantes ont une solution $p = \{ \chi, Y, F, G, H \}$, pour tout ρ appartenant aux sommets de l'ensemble $S_\rho = [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$:*

$$M_p = M_p^T \geq 0, \quad (\text{III.5.2.33})$$

$$M_Q = \begin{bmatrix} M_A + M_A^T + M_p^d & M_B & M_C^T \\ M_B^T & -\gamma \mathbb{I} & M_D^T \\ M_C & M_D & -\gamma \mathbb{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (\text{III.5.2.34})$$

Si la LMI (III.5.2.33) a une solution p , une des commandes avec séquençement de gains est donnée dans l'espace d'état par

$$\begin{cases} C_{cs} = F_s^T S_s^{-1} \\ B_{cs} = -\chi_s^{-1} G_s^T \\ A_{cs} = \left\{ (A_s + \chi_s^{-1} G_s^T C_{2s}) Y - \chi_s^{-1} H_s^T + B_{2s} F_s^T - \frac{d}{dt}(\chi^{-1_s}) \right\} S_s^{-1}, \end{cases} \quad (\text{III.5.2.35})$$

tel que

$$\begin{cases} S_s = Y_s - \chi_s^{-1}, \\ \chi_s = \chi_{11}, \\ Y_s = Y_{11}, \\ F_s = F_1 - A_{12}A_{22}^{-1}F_2, \\ G_s = G_1 - G_2A_{22}^{-1}A_{21} \\ H_s = H_{11} - H_{12}A_{22}^{-1}A_{21} - A_{12}A_{22}^{-1}H_{21} + A_{12}A_{22}^{-1}H_{22}A_{22}^{-1}A_{21}. \end{cases}$$

Théorème 8. *Considérons le système LPV descripteur suivant*

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + B_1w(t) + B_2u(t), & \text{avec } D_{11} = 0 \\ z(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t), \\ y(t) = C_2x(t), \end{cases} \quad (\text{III.5.2.36})$$

Si la LMI (III.5.2.33) a une solution p , alors une des commandes par séquençement de gain vérifiant que le système en boucle fermé a un gain L_2 inférieur à γ est donné par

$$\begin{cases} C_c = F^T S^{-T} \\ B_c = -\chi^{-T} G^T \\ A_c = \left\{ (A + \chi^{-T} G^T C_2) Y^T - \chi^{-T} H^T + B_2 F^T - \frac{d}{dt}(\chi^{-1}) \right\} S^{-T}. \end{cases} \quad (\text{III.5.2.37})$$

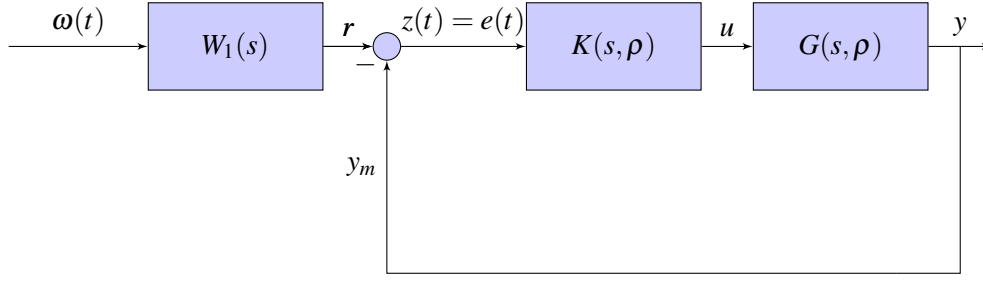
Preuve 1. La preuve de ce théorème est dans la section "Dérivation of an LMI condition for H_∞ controllers design" de l'article de Masubuchi [98].

Remarque 10. En remplaçant χ et Y dans (III.5.2.33), la condition LMI non stricte (III.5.2.33) est équivalente en faisabilité à la condition LMI stricte suivante :

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \chi_{11} \end{bmatrix} > 0. \quad (\text{III.5.2.38})$$

5.2.4.3 Commande H_∞

Pour assurer la stabilité en boucle fermé ainsi que la robustesse du système de commande vis-à-vis les variations des paramètres. Le schéma de commande H_∞ est illustré dans la figure (5.1) [16].

FIGURE 5.1 – Commande H_∞ du robot

Dans la figure (5.1), $G(s, \rho) = C(sE - A(\rho))^{-1}$ représente la fonction de transfert du système LPV descripteur obtenu dans la section 5.2.2. $K(s, \rho)$ est le correcteur LPV à déterminer. Grâce à un réglage convenable de la structure et des paramètres de la fonction de pondération $W_1(s)$, il est possible d'imposer les exigences désirées suivantes sur la fonction de transfert en boucle fermée $T_{r \rightarrow e}$ [104] :

- la bande passante ω_c ,
- l'erreur de position en régime permanent E_p ,
- la marge de module M_{mod} (qui est l'inverse de la norme infinie de la fonction de sensibilité),

5.3 Application au robot à 2DDLs sans charge pendulaire

Rappelons les caractéristiques de l'équation du mouvement du robot à deux bras décrites dans la Section 4.3 du chapitre précédent.

$$M(q) := \begin{bmatrix} J_\alpha & J_\beta J_\eta \cos x_{12} - x_{11} \\ J_\beta J_\eta \cos x_{12} - x_{11} & J_\gamma \end{bmatrix} \quad (\text{III.5.3.39})$$

$$C(q) := \begin{bmatrix} 0 & -J_\beta J_\eta \sin x_{12} - x_{11} x_{22} \\ J_\beta J_\eta \sin x_{12} - x_{11} x_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.5.3.40})$$

$$g(q) := \begin{bmatrix} J_\epsilon g \cos x_{11} \\ J_\beta L_2 g \cos x_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{III.5.3.41})$$

où x désigne le vecteur position articulaire définie par

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{III.5.3.42})$$

On pose $\mathbb{D}(x_{11}, x_{12})$ tel que :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(x_{11}, x_{12})^{-1} &:= \det M(q) \\ &= M m_1 \frac{L_1^2 L_2^2}{3} + m_1 m_2 \frac{L_1^2 L_2^2}{9} + m_2 M \frac{L_1^2 L_2^2}{3} + m_2^2 \frac{L_1^2 L_2^2}{12} + \left(m_2 M + M^2 + \frac{m_2^2}{4} \right) L_1^2 L_2^2 \sin^2(x_{12} - x_{11}). \\ &= J_\alpha J_\gamma - J_\beta^2 J_\eta^2 \cos^2(x_{12} - x_{11}). \end{aligned} \quad (\text{III.5.3.43})$$

$\mathbb{D}(x_{11}, x_{12}) > 0$, $\forall x_{11}, x_{12} \in \mathbb{R}$, donc $M(q)$ est toujours inversible. Il vient

$$\ddot{q} = -M(q)^{-1} C(q, \dot{q}) \dot{q} - M(q)^{-1} g(q) + M(q)^{-1} (\tau + J^T F_H) + M(q)^{-1} W_f. \quad (\text{III.5.3.44})$$

où

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \mathbb{D}(x_{11}, x_{12}) \begin{bmatrix} M L_2^2 + m_2 \frac{L_2^2}{3} & - (m_2 \frac{L_1 L_2}{2} + M L_1 L_2) \cos x_{12} - x_{11} \\ - (m_2 \frac{L_1 L_2}{2} + M L_1 L_2) \cos x_{12} - x_{11} & m_1 \frac{L_1^2}{3} + (m_2 + M) L_1^2 \end{bmatrix} \\ &= \mathbb{D}(x_{11}, x_{12}) \begin{bmatrix} J_\gamma & -J_\beta J_\eta \cos x_{12} - x_{11} \\ -J_\beta J_\eta \cos x_{12} - x_{11} & J_\alpha \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{III.5.3.45})$$

5.3.1 En absence de frottement

Soit $\tilde{\tau}$, la commande contenant la compensation du terme de gravité, Ainsi l'équation (III.5.3.46)

va s'écrire

$$\ddot{q} = -M(q)^{-1} C(q, \dot{q}) \dot{q} + M(q)^{-1} \tilde{\tau}. \quad (\text{III.5.3.46})$$

Pour arriver à écrire le système sous la forme LFR (III.5.2.2), on ne doit pas commencer par développer les calculs de l'inverse de la matrice d'inertie.

Tout d'abord on pose
$$\begin{cases} \rho_1 = \cos(x_{12} - x_{11}) \\ \rho_2 = x_{22} \sin(x_{12} - x_{11}) \\ \rho_3 = x_{21} \sin(x_{12} - x_{11}) \end{cases} .$$

Comme on l'avait mentionné dans la partie *Système linéaire à paramètres variants (LPV)* de l'annexe.E, il faut connaître les bornes sur les différentes composantes : $\rho_{k_{min}} < \rho_k < \rho_{k_{max}}$ et aussi parfois sur les vitesses de variation : $\dot{\rho}_{k_{min}} < \dot{\rho}_k < \dot{\rho}_{k_{max}}$.

Normalisation des paramètres variants

La normalisation des paramètres variants consiste à écrire ρ_i sous la forme

$$\rho_i = \rho_{N_i} + \rho_{0_i} \delta_i, \quad -1 < \delta_i < 1, \quad (\text{III.5.3.47})$$

$$\text{tel que } \rho_N = \frac{\rho_{max} + \rho_{min}}{2} \quad (\text{III.5.3.48})$$

$$\text{et } \rho_0 = \frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{2} \quad (\text{III.5.3.49})$$

Ainsi, comme dans le cadre de la co-manipulation robotique on impose un profil de vitesse borné on aura :

$$\begin{cases} -1 < \rho_1 < 1 \\ \rho_{2min} < \rho_2 < \rho_{2max} \\ \rho_{3min} < \rho_3 < \rho_{3max} \end{cases} .$$

En remplaçant dans les matrices d'inertie et de coriolis on obtient

$$M(q) := \begin{bmatrix} J_\alpha & J_\beta J_\eta \rho_1 \\ J_\beta J_\eta \rho_1 & J_\gamma \end{bmatrix} \quad (\text{III.5.3.50})$$

$$C(q, \dot{q}) := \begin{bmatrix} 0 & -J_\beta J_\eta \rho_2 \\ J_\beta J_\eta \rho_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.5.3.51})$$

D'après l'équation III.5.3.42, on obtient

$$\dot{X} := \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{III.5.3.52})$$

tel que

$$\dot{x}_1 = x_2 + 0\tilde{\tau}, \quad (\text{III.5.3.53})$$

$$\dot{x}_2 = -M^{-1}(\rho_1)C(\rho_2, \rho_3)x_2 + M^{-1}(\rho_1)\tilde{\tau}. \quad (\text{III.5.3.54})$$

Ceci se met sous la forme LPV comme suit

$$\dot{x} = A(\rho)x + B(\rho)\tilde{\tau}, \quad (\text{III.5.3.55})$$

avec

$$A(\rho) = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} & -M^{-1}(\rho_1)C(\rho_2, \rho_3) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B(\rho) = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ M^{-1}(\rho_1) \end{bmatrix}. \quad (\text{III.5.3.56})$$

On remarque bien que $M(q)$ varie d'une manière affine par rapport à ρ_1 :

$$M(\rho_1) = M_0 + M_c \rho_1,$$

$$\text{tel que } M_0 = \begin{bmatrix} J_\alpha & 0 \\ 0 & J_\gamma \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad M_c = \begin{bmatrix} 0 & J_\beta J_\eta \\ J_\beta J_\eta & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{III.5.3.57})$$

En remplaçant ça dans

$$\dot{x}_1 = x_2 + 0\tilde{\tau}, \quad (\text{III.5.3.58})$$

$$\dot{x}_2 = -M^{-1}(\rho_1)C(\rho_2, \rho_3)x_2 + M^{-1}(\rho_1)\tilde{\tau}. \quad (\text{III.5.3.59})$$

L'équation (III.5.3.59) devient

$$\begin{aligned} M(\rho_1)\dot{x}_2 &= -C(\rho_2, \rho_3)x_2 + \tilde{\tau}, \\ M_0\dot{x}_2 + M_c\rho_1\dot{x}_2 &= -C(\rho_2, \rho_3)x_2 + \tilde{\tau}, \\ \Rightarrow M_0\dot{x}_2 &= -M_c\rho_1\dot{x}_2 - C(\rho_2, \rho_3)x_2 + \tilde{\tau}, \\ \Rightarrow \dot{x}_2 &= -M_0^{-1}M_c\rho_1\dot{x}_2 - M_0^{-1}C(\rho_2, \rho_3)x_2 + M_0^{-1}\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (\text{III.5.3.60})$$

Tel que

$$M_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_\gamma} \end{bmatrix},$$

$$M_0^{-1}M_c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \\ \frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_0^{-1}C(\rho_2, \rho_3) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{J_\beta J_\eta \rho_2}{J_\alpha} \\ \frac{J_\beta J_\eta \rho_3}{J_\gamma} & 0 \end{bmatrix}.$$

On obtient alors,

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \ddot{q}_2 \rho_1 + \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \dot{q}_2 \rho_2 + \frac{1}{J_\alpha} \tilde{\tau}_1, \\ \ddot{q}_2 = -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} \ddot{q}_1 \rho_1 - \frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} \dot{q}_1 \rho_3 + \frac{1}{J_\gamma} \tilde{\tau}_2. \end{cases} \quad (\text{III.5.3.61})$$

En remplaçant par la normalisation des paramètres variants on aura :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \ddot{q}_2 \delta_1 + \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \dot{q}_2 \rho_{0_2} \delta_2 + \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \dot{q}_2 \rho_{N_2} + \frac{1}{J_\alpha} \tilde{\tau}_1, \\ \ddot{q}_2 = -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} \ddot{q}_1 \delta_1 - \frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} \dot{q}_1 \rho_{0_3} \delta_2 - \frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} \dot{q}_1 \rho_{N_3} + \frac{1}{J_\gamma} \tilde{\tau}_2. \end{cases} \quad (\text{III.5.3.62})$$

Le choix du vecteur des signaux de sortie à contrôler est comme suit

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \ddot{q}_2, & z_3 &= \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \rho_{0_2} \dot{q}_2, \\ z_2 &= \frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} \ddot{q}_1, & z_4 &= \frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} \rho_{0_3} \dot{q}_1. \end{aligned} \quad (\text{III.5.3.63})$$

et

$$\begin{aligned} v_1 &= \delta_1 z_1, & v_3 &= \delta_2 z_3, \\ v_2 &= \delta_1 z_2, & v_4 &= \delta_3 z_4, \end{aligned} \quad (\text{III.5.3.64})$$

tel que l'ordre est suivant la multiplicité des ρ_i .

Ainsi la matrice de passage qui relie v et z tel que $v(t) = \Delta(\rho)z(t)$ est comme suit :

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III.5.3.65})$$

d'après l'équation (III.5.3.61) on a

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \dot{x}_{21} = -v_1 + v_3 + \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \rho_{N_2} \dot{q}_2 + \frac{1}{J_\alpha} \tilde{\tau}_1, \\ \ddot{q}_2 = \dot{x}_{22} = -v_2 - v_4 - \frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} \rho_{N_3} \dot{q}_1 + \frac{1}{J_\gamma} \tilde{\tau}_2, \end{cases} \quad (\text{III.5.3.66})$$

ainsi en se basant sur (III.5.3.63), et en remplaçant les \dot{x}_{ij} par leurs expressions on obtient

$$\begin{cases} z_1 = -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} v_2 - \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} v_4 - \frac{J_\beta^2 J_\eta^2}{J_\alpha J_\gamma} \rho_{N_3} \dot{q}_1 + \frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma J_\alpha} \tilde{\tau}_2, \\ z_2 = -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} v_1 + \frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} v_3 + \frac{J_\beta^2 J_\eta^2}{J_\alpha J_\gamma} \rho_{N_2} \dot{q}_2 + \frac{1}{J_\gamma} \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \tilde{\tau}_1, \\ z_3 = \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \rho_{0_2} x_{22}, \\ z_4 = \frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} x_{21} \rho_{0_3}. \end{cases} \quad (\text{III.5.3.67})$$

Finalement la représentation linéaire fractionnaire du système (III.5.3.55) s'écrit

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{I}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \rho_{N_2} \\ -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} \rho_{N_3} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{J_\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_\gamma} \end{bmatrix} & -\mathbb{I}_{2 \times 2} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \mathbb{I}_{2 \times 2} & \mathbb{I}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} & \begin{bmatrix} -\frac{J_\beta^2 J_\eta^2}{J_\alpha J_\gamma} \rho_{N_3} & 0 \\ 0 & \frac{J_\beta^2 J_\eta^2}{J_\alpha J_\gamma} \rho_{N_2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha J_\gamma} \\ \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha J_\gamma} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \\ -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \\ \frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \rho_{0_2} \\ \frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} \rho_{0_3} & 0 \end{bmatrix} & \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\tau}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (\text{III.5.3.68})$$

Ainsi

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{z} \\ v \end{bmatrix}, \quad (\text{III.5.3.69})$$

$$\text{tel que } M_{11} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{I}_{2 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \rho_{N_2} \\ -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} \rho_{N_3} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.5.3.70})$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{J_\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_\gamma} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.5.3.71})$$

$$M_{13} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ -\mathbb{I}_{2 \times 2} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.5.3.72})$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{2 \times 2} & \mathbb{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.5.3.73})$$

$$M_{22} = \mathbb{O}_{2 \times 2}, \quad (\text{III.5.3.74})$$

$$M_{23} = \mathbb{O}_{2 \times 4}, \quad (\text{III.5.3.75})$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{2 \times 2} & \begin{bmatrix} -\frac{J_\beta^2 J_\eta^2}{J_\alpha J_\gamma} \rho_{N_3} & 0 \\ 0 & \frac{J_\beta^2 J_\eta^2}{J_\alpha J_\gamma} \rho_{N_2} \end{bmatrix} \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \rho_{0_2} \\ \frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} \rho_{0_3} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.5.3.76})$$

$$M_{32} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha J_\gamma} \\ \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha J_\gamma} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.5.3.77})$$

$$M_{33} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \\ -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \\ \frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.5.3.78})$$

5.3.2 Obtention du modèle descripteur affine de la modélisation LFR

Les résultats donnés dans la section 5.2.2 permettent alors d'avoir la représentation descripteur affine suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0_{n_v} \\ 0_{n_u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{13} & 0 \\ \Delta(\rho)M_{31} & \Delta(\rho)M_{33} - \mathbb{I}_{n_v} & \Delta(\rho)M_{32} \\ 0_r & 0_{n_v} & -\mathbb{I}_{n_u} \end{bmatrix} x_d + \begin{bmatrix} M_{12} \\ 0_{n_v} \\ \mathbb{I}_{n_u} \end{bmatrix} \tilde{\tau}, \quad (\text{III.5.3.79})$$

où x_d est le vecteur des variables descripteurs, il est construit en concaténant le vecteur d'état rationnel x avec le vecteur des variables supplémentaires. Dans notre cas on a choisit $x_d = \begin{bmatrix} x^T & v^T & \tilde{\tau}^T \end{bmatrix}^T$. La taille du vecteur x_d obtenu par ce choix est $r + n_v + n_u$.

Ce qui permet de l'écrire sous la forme

$$\begin{cases} E\dot{x}_d(t) = A(\rho(t))x_d(t) + B(\rho(t))\tilde{\tau}(t) \\ y = C_d(\rho(t))x_d(t), \end{cases} \quad (\text{III.5.3.80})$$

tel que

$$\begin{cases} E &= \text{blkdiag}(\mathbb{I}_{4 \times 4}, \mathbb{O}_{6 \times 6}), \\ C_d &= \begin{bmatrix} C & \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 4} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (\text{III.5.3.81})$$

L'application au robot à deux bras donne

$$\Delta(\rho)M_{31} = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{J_\beta^2 J_\eta^2}{J_\alpha J_\gamma} \rho_{N_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_\beta^2 J_\eta^2}{J_\alpha J_\gamma} \rho_{N_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \rho_{0_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} \rho_{0_3} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{III.5.3.82})$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{J_\beta^2 J_\eta^2}{J_\alpha J_\gamma} \rho_{N_3} \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_\beta^2 J_\eta^2}{J_\alpha J_\gamma} \rho_{N_2} \delta_1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \rho_{0_2} \delta_2 \\ 0 & 0 & \frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} \rho_{0_3} \delta_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\rho)M_{33} - \mathbb{I}_{n_v} = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} & 0 & -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \\ -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} & 0 & \frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \mathbb{I}_4 \quad (\text{III.5.3.83})$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \delta_1 & 0 & -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \delta_1 \\ -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} \delta_1 & -1 & \frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\rho)M_{32} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha J_\gamma} \delta_1 \\ \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha J_\gamma} \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.5.3.84})$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0_{n_v} \\ 0_{n_u} \end{bmatrix} = A(\rho(t))x_d(t) + B(\rho(t))\tilde{\tau}(t),$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{I}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \rho_{N_2} \\ -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} \rho_{N_3} & 0 \end{bmatrix} & -\mathbb{I}_{2 \times 2} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{J_\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_\gamma} \end{bmatrix} \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} & \begin{bmatrix} -\frac{J_\beta^2 J_\eta^2}{J_\alpha J_\gamma} \rho_{N_3} \delta_1 & 0 \\ 0 & \frac{J_\beta^2 J_\eta^2}{J_\alpha J_\gamma} \rho_{N_2} \delta_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \delta_1 \\ -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} \delta_1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -\frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \delta_1 \\ \frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} \delta_1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha J_\gamma} \delta_1 \\ \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha J_\gamma} \delta_1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{J_\beta J_\eta}{J_\alpha} \rho_{02} \delta_2 \\ \frac{J_\beta J_\eta}{J_\gamma} \rho_{03} \delta_3 & 0 \end{bmatrix} & \mathbb{O}_{2 \times 2} & -\mathbb{I}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} & -\mathbb{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} x_d$$

(III.5.3.85)

$$+ \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ \mathbb{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \tilde{\tau}.$$

5.3.3 Système LPV augmenté pour le control H_∞

5.3.3.1 Cas du filtre au niveau de la trajectoire désirée

A présent, le modèle LPV descripteur affine est augmenté afin d'inclure la contrainte imposée sur la fonction de sensibilité du système bouclé par l'intermédiaire de la fonction de pondération W_1 du schéma H_∞ (cf. Figure 5.1). En choisissant la fonction de pondération comme suit :

$$W_1(s) = \frac{s+a}{K_0(s+b)} \mathbb{I}_2. \tag{III.5.3.86}$$

Le système LPV descripteur augmenté $G_1(s, \rho)$ est obtenu en cherchant la représentation d'état du filtre $W_1(s)$ et en prenant $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x(t)^T & \hat{x}(t)^T \end{bmatrix}$, tel que $\hat{x}(t)$ est le vecteur d'état du filtre.

$$\begin{aligned} W_1(s) &= \frac{1}{K_0} \left[\frac{s+b+a-b}{s+b} \right], \\ &= \frac{1}{K_0} \left[1 + \frac{a-b}{s+b} \right], \end{aligned} \quad (\text{III.5.3.87})$$

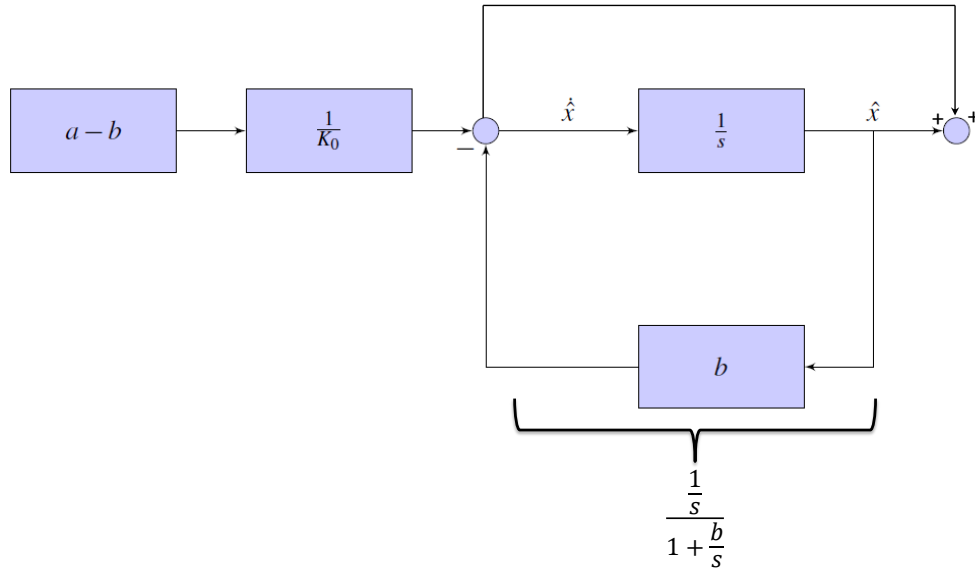


FIGURE 5.2 – Schéma block de la représentation d'état du filtre

La représentation d'état du filtre est comme suit (cf. Figure 5.2)

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \frac{a-b}{K_0} \omega - b\hat{x}, \\ r = \hat{x} + \frac{1}{K_0} \omega. \end{cases} \quad (\text{III.5.3.88})$$

Ainsi

$$\begin{cases} E\dot{x}_d(t) = A(\rho(t))x_d(t) + B(\rho(t))u(t), \\ y = C_d(\rho(t))x_d(t), \\ \dot{\hat{x}} = \frac{a-b}{K_0} \omega - b\hat{x}, \\ z = r - y = \hat{x} + \frac{1}{K_0} \omega - C_d(\rho(t))x_d(t). \end{cases} \quad (\text{III.5.3.89})$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} E & \mathbb{O}_2 \\ \mathbb{O}_{2 \times 12} & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A(\rho) & \mathbb{O}_2 \\ \mathbb{O}_{2 \times 12} & -b\mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{10 \times 2} \\ \frac{a-b}{K_0} \mathbb{I}_2 \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} B(\rho) \\ \mathbb{O}_4 \end{bmatrix} u, \\ z = \begin{pmatrix} -C(\rho) & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} + \frac{1}{K_0} \mathbb{I}_2 \omega + \mathbb{O}_2 u. \end{array} \right. \quad (\text{III.5.3.90})$$

De cette manière, le système va être mis sous la forme de l'équation (III.5.3.96) avec

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} E & \mathbb{O}_2 \\ \mathbb{O}_{2 \times 12} & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix}, & A_1(\rho) &= \begin{pmatrix} A(\rho) & \mathbb{O}_2 \\ \mathbb{O}_{2 \times 12} & -b\mathbb{I}_2 \end{pmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{10 \times 2} \\ \frac{a-b}{K_0} \mathbb{I}_2 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} B(\rho) \\ \mathbb{O}_2 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= \begin{pmatrix} -C_d(\rho) & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix}, & D_1 &= \frac{1}{K_0} \mathbb{I}_2. \end{aligned} \quad (\text{III.5.3.91})$$

La méthode de synthèse de commande basée sur les LMI qu'on va traiter nécessite que le système soit strictement propre (c'est-à-dire $D_1 = 0$). Il est possible de satisfaire cette condition en définissant le nouveau vecteur d'état généralisé $\tilde{x} = [\tilde{x}(t)^T \quad \omega(t)^T]^T$. Le système devient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_1 \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}_1(\rho) \tilde{x}(t) + \tilde{B}_1 w(t) + \tilde{B}_2 u(t), \\ z(t) = \tilde{C} \tilde{x}(t), \end{array} \right. \quad (\text{III.5.3.92})$$

tel que $\tilde{E}_1 = \text{diag}(E_1, \mathbb{O}_2)$, $\tilde{A}_1 = \text{diag}(A_1, -\mathbb{I}_2)$, $\tilde{B}_2 = [B_2^T \quad \mathbb{O}_2]^T$ et $\tilde{C} = [C_1 \quad D_1]$.

5.3.3.2 Cas du filtre au niveau de l'erreur de suivi de trajectoire

Le choix de la structure de commande classique (cf. Figure 5.3) avec W_1 la fonction de pondération sur le suivi de trajectoire, pour fixer des spécifications sur la sortie contrôlée z .

La représentation d'état du filtre est comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}} = \frac{a-b}{K_0} \varepsilon - b\hat{x}, \\ z = \hat{x} + \frac{1}{K_0} \varepsilon. \end{array} \right. \quad (\text{III.5.3.93})$$

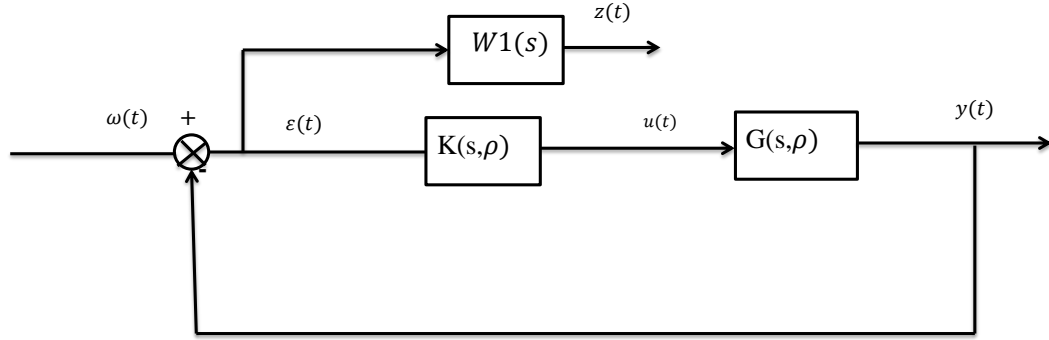


FIGURE 5.3 – Structure de commande choisie

Or $\varepsilon = \omega - y$, ainsi

$$\begin{cases} E\dot{x}_d(t) = A(\rho(t))x_d(t) + B(\rho(t))u(t), \\ y = C_d(\rho(t))x_d(t), \\ \dot{\hat{x}} = \frac{a-b}{K_0}\omega + \frac{b-a}{K_0}y - b\hat{x}, \\ z = \hat{x} + \frac{1}{K_0}\omega - \frac{1}{K_0}y. \end{cases}, \quad (\text{III.5.3.94})$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} E & \mathbb{O}_2 \\ \mathbb{O}_{2 \times 12} & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A(\rho) & \mathbb{O}_2 \\ \frac{b-a}{K_0}C_d & -b\mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{10 \times 2} \\ \frac{a-b}{K_0}\mathbb{I}_2 \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} B(\rho) \\ \mathbb{O}_4 \end{bmatrix} u, \\ z = \begin{pmatrix} -\frac{1}{K_0}C_d(\rho) & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \frac{1}{K_0}\mathbb{I}_2\omega + \mathbb{O}_2u \end{cases}, \quad (\text{III.5.3.95})$$

pour pouvoir écrire le système sous la forme descripteur avec $E = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, on pose $\tilde{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}^T & x_d^T \end{bmatrix}^T$. le système descripteur augmenté va s'écrire comme suit

$$\begin{cases} E_1\dot{\tilde{x}}(t) = A_1(\rho)\tilde{x}(t) + B_1w(t) + B_2u(t), \\ z(t) = C_1\tilde{x}(t) + D_1\omega(t), \end{cases} \quad (\text{III.5.3.96})$$

où

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & \mathbb{O}_2 \\ \mathbb{O}_{2 \times 12} & E \end{pmatrix}, & A_1(\rho) &= \begin{pmatrix} -b\mathbb{I}_2 & \frac{b-a}{K_0}C_d \\ \mathbb{O}_{2 \times 12} & A(\rho) \end{pmatrix}, \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} \frac{a-b}{K_0}\mathbb{I}_2 \\ \mathbb{O}_{10 \times 2} \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} \mathbb{O}_2 \\ B(\rho) \end{bmatrix}, \\
 C_1 &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & -\frac{1}{K_0}C_d(\rho) \end{pmatrix}, & D_1 &= \frac{1}{K_0}\mathbb{I}_2.
 \end{aligned} \tag{III.5.3.97}$$

La méthode de synthèse de commande basée sur les LMI qu'on va traiter nécessite que le système soit strictement propre (c'est-à-dire $D_1 = 0$). Il est possible de satisfaire cette condition en définissant le nouveau vecteur d'état généralisé $\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}(t)^T & \omega(t)^T \end{bmatrix}^T$. Le système devient alors

$$\begin{cases} \tilde{E}_1 \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}_1(\rho) \tilde{x}(t) + \tilde{B}_1 w(t) + \tilde{B}_2 u(t), \\ z(t) = \tilde{C} \tilde{x}(t), \end{cases} \tag{III.5.3.98}$$

tel que $\tilde{E}_1 = \text{diag}(E_1, \mathbb{O}_2)$, $\tilde{A}_1 = \text{diag}(A_1, -\mathbb{I}_2)$, $\tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2^T & \mathbb{O}_2 \end{bmatrix}^T$ et $\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_1 & D_1 \end{bmatrix}$.

5.3.4 Détermination du filtre correspondant au cahier de charge

5.3.4.1 Marge de robustesse

Avant de résoudre le problème de performance, le correcteur doit garantir les contraintes de robustesse

Rappel 1. *Considérons le diagramme de Nyquist du transfert de boucle ouverte, La marge de module représente la distance minimale entre le transfert de boucle et le point critique -1. La marge de phase est liée au point où le gain du transfert de boucle est unitaire. La marge de gain représente la distance entre le point critique et le point où la phase du transfert de boucle vaut $-\pi$.*

La marge de module est donc une mesure plus globale que les marges de gain et de phase. En effet, la marge de module impose une borne supérieure de la fonction de sensibilité sur toutes les fréquences, et pas seulement aux deux fréquences associées aux marges de gain et de phase. Par ailleurs, il a été démontré qu'une valeur de la marge de module garantit une borne inférieure des marge de phase et de gain [105].

La marge de module est donc prioritairement choisie comme mesure de robustesse. Nous pouvons considérer en plus la marge de phase parce que généralement, plus la marge de phase est élevée, plus le système est amorti.

5.3.4.2 Détermination du filtre

Le filtre considéré a comme expression

$$\frac{s+a}{K_0(s+b)}, \quad \text{tel que } a > b \text{ et } K_0 \geq 1. \quad (\text{III.5.3.99})$$

Ce transfert a un gain statique de $\frac{a}{K_0 b}$, un gain minimal de $\frac{1}{K_0}$ et il présente un gain de $-3db$ à la fréquence de coupure

$$\omega_c = \sqrt{\frac{a^2 - 2K_0^2 b^2}{2K_0^2 - 1}}. \quad (\text{III.5.3.100})$$

En multivariable la marge de module en sortie d'un système est $\Delta_M = \frac{1}{\|S_y(s)\|_\infty}$, tel que $S(s) = (\mathbb{I} + G_r(s, \rho) \cdot K(s, \rho))^{-1}$ est la fonction de sensibilité.

S'il existe γ tel que

$$\|S_y(s) \cdot W_1(s)\|_\infty < \gamma, \quad \forall \rho \in [\rho_{min} \quad \rho_{max}], \quad (\text{III.5.3.101})$$

alors on peut déduire que

- La marge de module du système est supérieur à $\frac{1}{K_0}$,
- L'erreur statique est inférieure à $\frac{K_0 b}{a}$,
- La bande passante est supérieure à ω_c .

Pour définir alors le filtre correspondant a un cahier de charge donné

1. K_0 est déterminée a partir de la marge de gain,
2. le rapport $\frac{b}{a}$ est ensuite déduit a partir de l'erreur statique,
3. le coefficient a est alors déterminé par l'expression de la bande passante

$$a = \omega_c \sqrt{\frac{2K_0^2 - 1}{1 - 2K_0^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2}}, \quad (\text{III.5.3.102})$$

4. on détermine b à partir de la valeur de $\frac{b}{a}$.

Le but de principal de la co-manipulation est de réaliser un bon suivi de la trajectoire désirée par l'opérateur humain. Les spécificités du filtre sont alors choisies comme suit

- $K_0 = 2$ pour assurer une bonne marge de robustesse,

- $\varepsilon_p = 0.001$ de sorte que l'erreur de suivi soit inférieure à 0.1%,
- $\omega_c > 10 \text{ rad.s}^{-1}$ pour avoir un temps de réponse inférieur à 0.23 secondes.

5.4 Application du théorème 7 pour le synthèse d'un control H_∞

La résolution d'une LMI est un problème d'optimisation convexe. Certains algorithmes dédiés à ce type de problèmes ont été développés pour Mathworks [106]. L'environnement MATLAB permet aussi de résoudre ce problème à l'aide de la boîte à outils de commande robuste, mais il est également possible d'utiliser l'interface Cvx, le solveur Yalmip [107] et le solveur Sedumi [108, 109].

La boîte à outils de la commande robuste (Matlab) utilise la fonction "setlmis" pour initialiser le générateur d'LMI. La fonction "lmivar" (voir [110]) permet de définir les propriétés de la variable d'optimisation. La fonction "getlmis" génère l'LMI dans la forme requise pour le traitement par la fonction "feasp". Cette fonction permet de résoudre le problème de faisabilité des LMI. Le YALMIP utilise la fonction "sdpvar" pour définir les propriétés de variable d'optimisation. Les contraintes sont simples en utilisant les parenthèses sous la forme [expression]. La fonction "solvesdp" permet de résoudre le problème d'optimisation. Nous pouvons extraire la solution courante en appliquant la fonction "double" sur la variable d'intérêt.

On rappelle que l'approche H_∞ pour les systèmes LPV consiste à trouver une commande K et γ_∞ minimal qui résout le problème LMI précédent en chaque sommet du polytope défini par le système (III.5.3.69). Ainsi la commande appliquée est une combinaison convexe de toutes les commandes obtenues en chaque sommet. Ce contrôle peut être exprimé comme suit :

$$S(\delta) = \sum_{k=1}^{2^i} \alpha_k(\delta) \begin{bmatrix} A_{c_k} & B_{c_k} \\ C_{c_k} & O \end{bmatrix}, \quad (\text{III.5.4.103})$$

avec

$$\alpha_k(\delta) = \frac{\prod_{j=1}^i |\delta_j - C(\omega_k)_j|}{\prod_{j=1}^i (\bar{\delta}_j - \underline{\delta}_j)}, \quad (\text{III.5.4.104})$$

et

$$\sum_{k=1}^{2^i} \alpha_k(\delta) = 1, \quad \alpha_k(\delta) > 0, \quad (\text{III.5.4.105})$$

où i désigne le nombre de paramètre variant, ω_k sont les vertex du polytope formé par tout les extrémités de chaque paramètre variant et $k = 2^i$, le nombre de vertex du polytope. Finalement $C(\omega_k)_j$ est la jème composante du vecteur $C(\omega_k)$ défini par

$$C(\omega_k) = \{\delta_j / \delta_j = \bar{\delta}_j \quad \text{si} \quad (\omega_k)_j = \delta_j, \text{ ou } \delta_j = \underline{\delta}_j \quad \text{si non}\} \quad (\text{III.5.4.106})$$

coordonnés polytopiques sont donnés par

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \\ \omega_7 \\ \omega_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\delta}_1 & \underline{\delta}_2 & \underline{\delta}_3 \\ \underline{\delta}_1 & \bar{\delta}_2 & \underline{\delta}_3 \\ \underline{\delta}_1 & \bar{\delta}_2 & \bar{\delta}_3 \\ \underline{\delta}_1 & \underline{\delta}_2 & \bar{\delta}_3 \\ \bar{\delta}_1 & \bar{\delta}_2 & \bar{\delta}_3 \\ \bar{\delta}_1 & \underline{\delta}_2 & \bar{\delta}_3 \\ \bar{\delta}_1 & \underline{\delta}_2 & \underline{\delta}_3 \\ \bar{\delta}_1 & \bar{\delta}_2 & \underline{\delta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{III.5.4.107})$$

$$\text{et } C(\omega) = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_1 & \bar{\delta}_2 & \bar{\delta}_3 \\ \bar{\delta}_1 & \underline{\delta}_2 & \bar{\delta}_3 \\ \bar{\delta}_1 & \underline{\delta}_2 & \underline{\delta}_3 \\ \bar{\delta}_1 & \bar{\delta}_2 & \underline{\delta}_3 \\ \underline{\delta}_1 & \underline{\delta}_2 & \underline{\delta}_3 \\ \underline{\delta}_1 & \bar{\delta}_2 & \underline{\delta}_3 \\ \underline{\delta}_1 & \bar{\delta}_2 & \bar{\delta}_3 \\ \underline{\delta}_1 & \underline{\delta}_2 & \bar{\delta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{III.5.4.108})$$

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{(|\delta_1 - \bar{\delta}_1|)(|\delta_2 - \bar{\delta}_2|)(|\delta_3 - \bar{\delta}_3|)}{(\bar{\delta}_1 - \underline{\delta}_1)(\bar{\delta}_2 - \underline{\delta}_2)(\bar{\delta}_3 - \underline{\delta}_3)} \\
 \alpha_2 &= \frac{(|\delta_1 - \bar{\delta}_1|)(|\delta_2 - \bar{\delta}_2|)(|\delta_3 - \bar{\delta}_3|)}{(\bar{\delta}_1 - \underline{\delta}_1)(\bar{\delta}_2 - \underline{\delta}_2)(\bar{\delta}_3 - \underline{\delta}_3)} \\
 \alpha_3 &= \frac{(|\delta_1 - \bar{\delta}_1|)(|\delta_2 - \bar{\delta}_2|)(|\delta_3 - \bar{\delta}_3|)}{(\bar{\delta}_1 - \underline{\delta}_1)(\bar{\delta}_2 - \underline{\delta}_2)(\bar{\delta}_3 - \underline{\delta}_3)} \\
 \alpha_4 &= \frac{(|\delta_1 - \bar{\delta}_1|)(|\delta_2 - \bar{\delta}_2|)(|\delta_3 - \bar{\delta}_3|)}{(\bar{\delta}_1 - \underline{\delta}_1)(\bar{\delta}_2 - \underline{\delta}_2)(\bar{\delta}_3 - \underline{\delta}_3)} \\
 \alpha_5 &= \frac{(|\delta_1 - \bar{\delta}_1|)(|\delta_2 - \bar{\delta}_2|)(|\delta_3 - \bar{\delta}_3|)}{(\bar{\delta}_1 - \underline{\delta}_1)(\bar{\delta}_2 - \underline{\delta}_2)(\bar{\delta}_3 - \underline{\delta}_3)} \\
 \alpha_6 &= \frac{(|\delta_1 - \bar{\delta}_1|)(|\delta_2 - \bar{\delta}_2|)(|\delta_3 - \bar{\delta}_3|)}{(\bar{\delta}_1 - \underline{\delta}_1)(\bar{\delta}_2 - \underline{\delta}_2)(\bar{\delta}_3 - \underline{\delta}_3)} \\
 \alpha_7 &= \frac{(|\delta_1 - \bar{\delta}_1|)(|\delta_2 - \bar{\delta}_2|)(|\delta_3 - \bar{\delta}_3|)}{(\bar{\delta}_1 - \underline{\delta}_1)(\bar{\delta}_2 - \underline{\delta}_2)(\bar{\delta}_3 - \underline{\delta}_3)} \\
 \alpha_8 &= \frac{(|\delta_1 - \bar{\delta}_1|)(|\delta_2 - \bar{\delta}_2|)(|\delta_3 - \bar{\delta}_3|)}{(\bar{\delta}_1 - \underline{\delta}_1)(\bar{\delta}_2 - \underline{\delta}_2)(\bar{\delta}_3 - \underline{\delta}_3)}
 \end{aligned} \tag{III.5.4.109}$$

Si on impose au transfert en boucle fermé : la fréquence de coupure $\omega_c = 10 \text{ rad.s}^{-1}$, l'erreur statique de position $E_p < 10^{-3}$ et la marge de module $M_m = 0.66$, on aura : $K_0 = 1.5$ et l'indice de performance $\gamma = 1.0248$.

5.5 Résultats de simulations

Les simulations suivantes ont été faites en utilisant MATLAB et Simulink, à l'aide des paramètres suivant : $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 8 \text{ kg}$, $M = 2 \text{ kg}$, $L_1 = 5 \text{ [m]}$, $L_2 = 4 \text{ [m]}$ et $g = 9.81 \text{ [m/s}^2]$. Les temps de réaction sont réglés avec $\varepsilon_r = \varepsilon_f = 0,2 \text{ [s]}$. Les seuils d'effort sont réglés comme suit : $f_{th} = 1 \text{ [N]}$ et $f_{th-} = 0.75, \text{ [N]}$. La position initiale du bras du robot est $q_1(0) = -\pi/3$ $q_2(0) = \pi/18$. La Figure 5.4 affiche le suivi de trajectoire de la position de l'organe terminal, on voit bien le bon suivi de x et de y . Cette même Figure affiche les erreurs de suivi de trajectoires correspondantes, on voit bien que ces erreurs convergent bien vers zéros avec une dynamique très rapide. Dans la Figure 5.5, le suivi de vitesse ainsi que les erreurs de suivi sont schématisés. On peut constater que ses erreurs de suivi convergent vers une valeur nulle avec une dynamique plus lente que celle du suivi de position.

La Figure 5.6 met en évidence l'accomplissement de l'exigence de colinéarité entre la force et la vitesse. Cette colinéarité est bien évidemment observée lors de la phase de mouvement : dès

que la norme de la force de l'opérateur (vert) coupe le seuil montant (tiret-marron), la vitesse de l'effecteur suit l'orientation de la force et elle y reste parfaitement colinéaire jusqu'au moment de déclenchement de la phase d'arrêt.

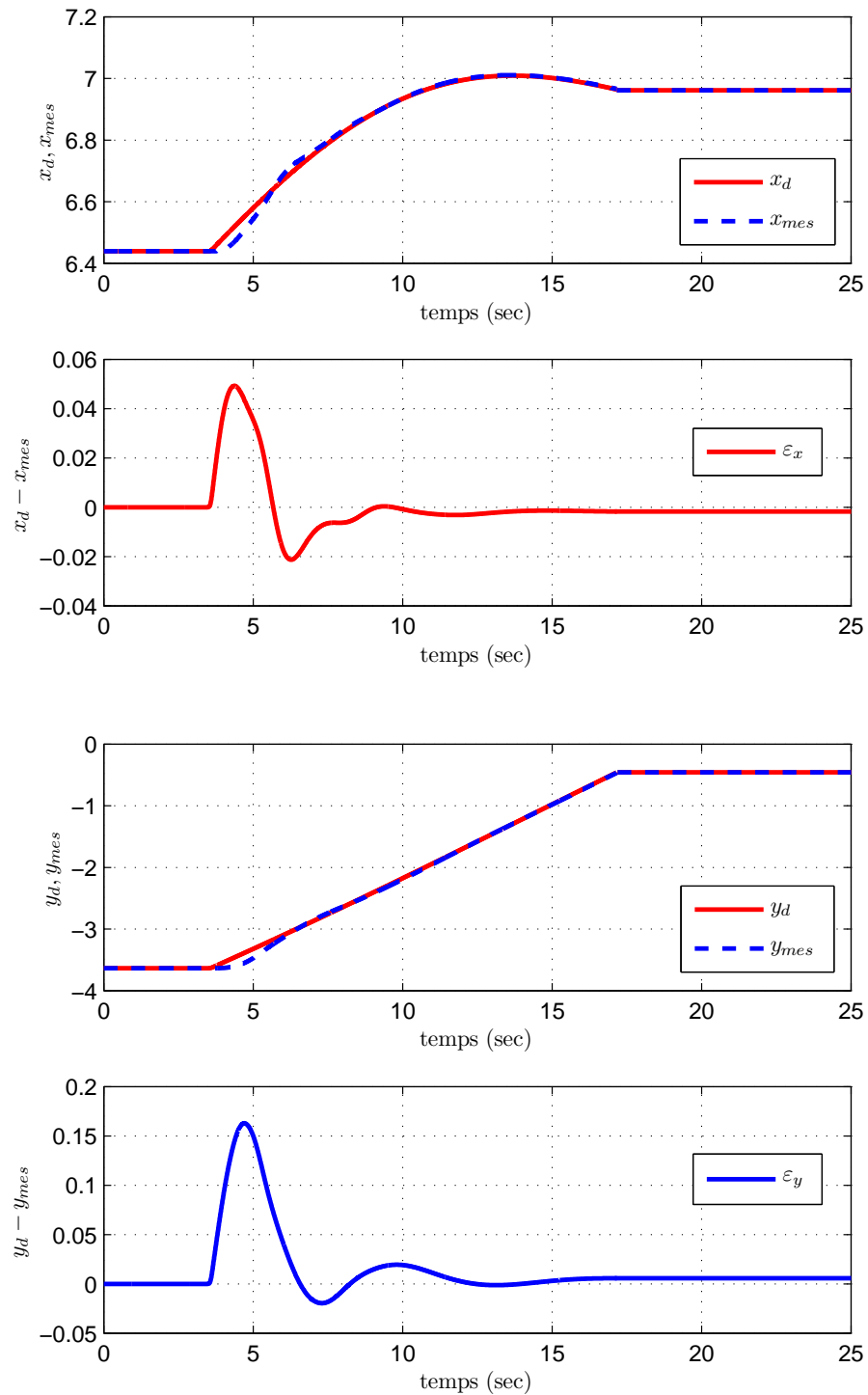


FIGURE 5.4 – Suivi de position.

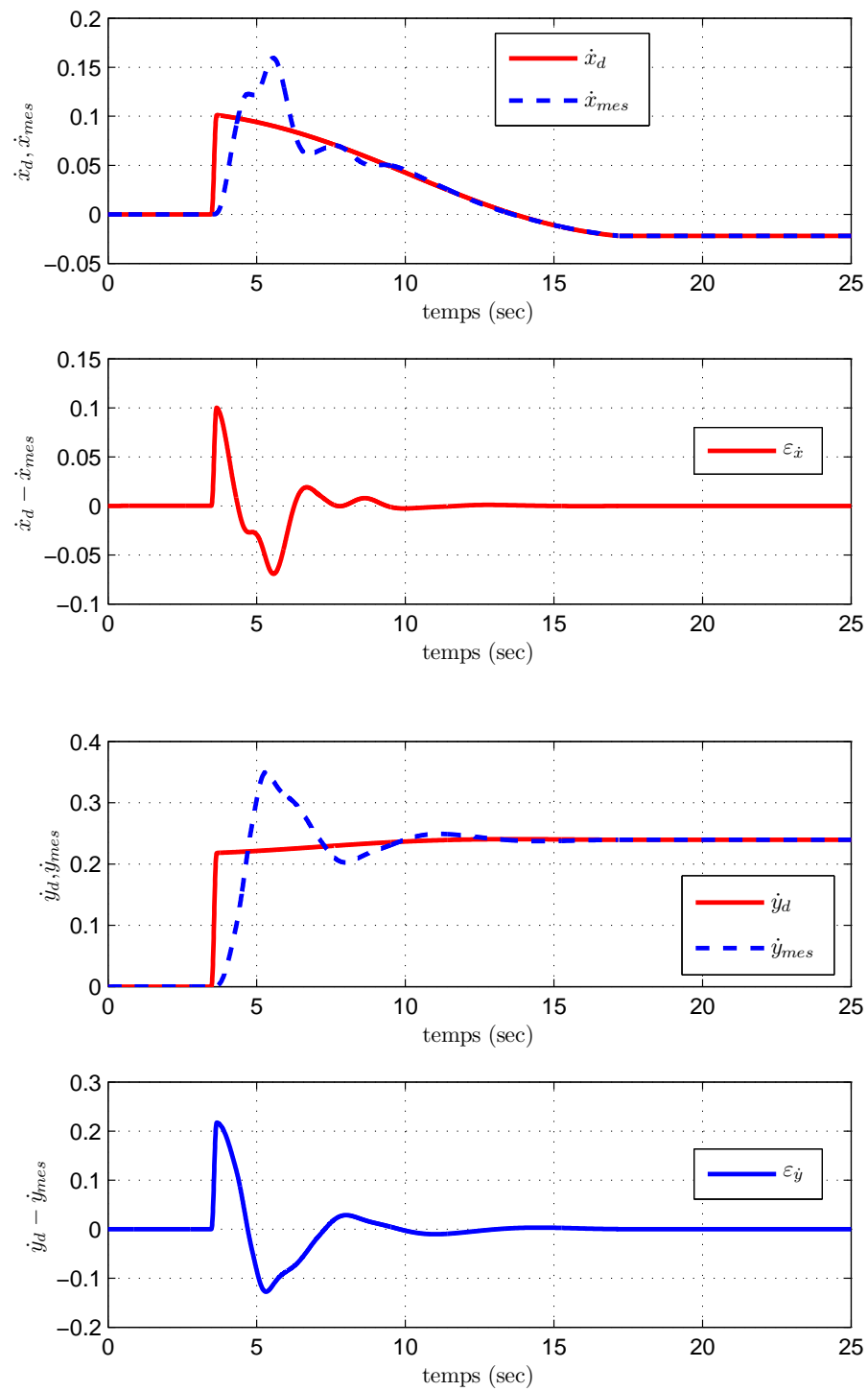


FIGURE 5.5 – Suivi de vitesse.

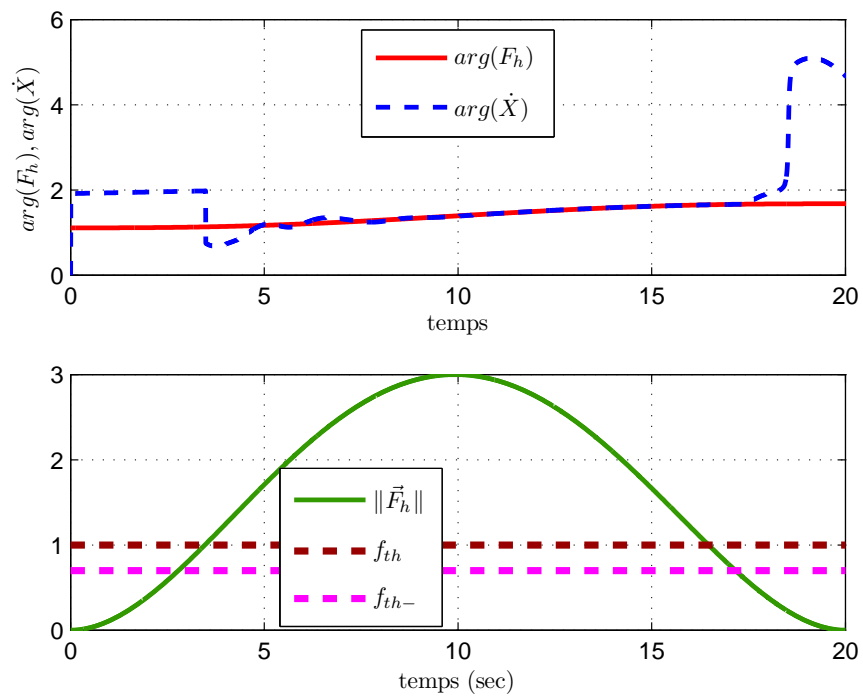


FIGURE 5.6 – Colinéarité entre la force de l'opérateur \vec{F}_h et la vitesse de l'organe terminal $\dot{\vec{X}}$.

Les figures présentées dans ce chapitre, montrent l'efficacité de la méthodologie de commande proposée pour la stabilisation du système et le maintien des performances (découplage des articulations, rapidité, précision).

Annexe A

Les quaternions

Le quaternion, introduit par Hamilton en 1843 constitue une extension de l'ensemble des nombres complexes à une variété de dimension 4. L'ensemble des quaternions, noté \mathbb{H} , possède des propriétés analogues à celles que possèdent les nombres complexes dans le plan. Il peut être muni d'une addition et d'une multiplication qui font de lui un des premiers exemples de corps non commutatif. La relation qui existe entre les quaternions et les rotations en dimension 3 fait de l'ensemble des quaternions un outil utile en théorie de la commande. Un quaternion est décrit comme un quadruplet de nombres réels, le premier élément étant un scalaire et les trois éléments restants formant un vecteur ou un imaginaire pur :

$$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3, \quad (\text{A.1})$$

tel que les composantes imaginaires i, j, k sont définies par :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad (\text{A.2})$$

et vérifient

$$ij = k; jk = i; ki = j; ji = -k; kj = -i; ik = -j. \quad (\text{A.3})$$

On peut définir le quaternion de la manière suivante

$$q = (q_s, q_v),$$

où q_s est le scalaire et q_v est le vecteur.

Les operations basique du quaternenion sont énumérés dans le tableau suivant

Un quaternion $q = (q_s, q_v)$ verifie	
Addition	$q_1 + q_2 = (q_{s1} + q_{s2}, q_{v1} + q_{v2})$
Multiplication par un scalaire	$\lambda q = (\lambda q_s, \lambda q_v)$
Multiplication	$q_1 q_2 = (q_{s1} q_{s2} - q_{v1} \cdot q_{v2}, q_{s1} q_{v2} + q_{s2} q_{v1} + q_{v1} \times q_{v2})$
Inverse	$q q^{-1} = q^{-1} q = 1,$ tel que $q^{-1} = \left(\frac{q_s}{\ q\ ^2}, \frac{-q_v}{\ q\ ^2} \right)$
Conjugué	$q^* = (q_s, -q_v)$
Norme 2	$\ q\ ^2 = q q^* = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$

Quaternion unitaire

Ce sont les quaternions de norme 1 c'est-à-dire $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$. Soient $q_n = \|q\|$ et $v = \|\vec{q}_v\|$

$$\begin{aligned} q &= q_n \left(\frac{q_s}{q_n}, \frac{1}{q_n} \cdot q_v \right) \\ &= q_n \left(\frac{q_s}{q_n}, \frac{v}{q_n} \frac{1}{v} \cdot q_v \right). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Or $\frac{1}{v} \cdot q_v$ est un vecteur normé, ce qui donne

$$\frac{q_s^2}{q_n^2} + \frac{v^2}{q_n^2} = 1. \quad (\text{A.5})$$

Il en résulte alors qu'il existe un angle φ dont le *cos* et le *sin* valent respectivement $\frac{q_s}{q_n}$ et $\frac{v}{q_n}$ et un vecteur normé $\vec{u} = \frac{1}{v} \cdot \vec{q}_v$ de sorte que le quaternion q s'écrit

$$q = q_n (\cos \varphi, \sin \varphi \cdot \vec{u}).$$

Cette façon d'écrire un quaternion est importante, les termes $q \cos \varphi$ et $q \sin \varphi \cdot \vec{u}$ sont en effet respectivement le produit scalaire et le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 orthogonal à \vec{q}_v , ces 2 vecteurs faisant entre eux un angle égal à φ .

Représentation matricielle d'un quaternion

Les quaternions peuvent être représentés sous la forme de matrice complexe 2×2 ou d'une matrice réelle 4×4 tel que la multiplication des matrices correspond à la multiplication des quaternions. La représentation complexe 2×2 est

$$\begin{aligned} Q &= q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k, \\ &= \begin{pmatrix} q_0 + iq_3 & iq_1 - q_2 \\ iq_1 + q_2 & q_0 - iq_3 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Les quatre composantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de cette matrice sont Cayley Klein c'est-à-dire $\beta = -\gamma^*$ et $\delta = \alpha^*$, avec $*$ signifie l'opérateur conjugué.

La représentation 4×4 est comme suit

$$Q = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

qui est un moyen utile pour calculer le produit de quaternions.

L'opérateur de rotation $R(V) = Q(0, V)Q^{-1}$ peut être représenté par la matrice réelle 3×3

$$R = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Correspondance entre quaternion unitaire et rotation vectorielle

On peut démontrer que le transformé $\vec{V}' = R_{[2\varphi, \vec{N}]}(\vec{V})$ d'un vecteur \vec{V} par la rotation d'angle 2φ et d'axe \vec{N} (vecteur normé) peut être calculé grâce au produit de quaternions

$$q_1 * q_2 * q_1^{-1},$$

avec

$$\begin{aligned} q_1 &= (\cos \varphi, \sin \varphi \vec{N}), \\ q_2 &= (0, \vec{V}), \\ q_1^{-1} &= (\cos \varphi, -\sin \varphi \vec{N}). \end{aligned}$$

La multiplication des quaternions est notée par (une double étoile). Ainsi le quaternion associé à la rotation d'angle 2φ autour d'un axe orienté selon le vecteur normé \vec{N} de coordonnées (x, y, z) est comme suit

$$q = \cos \varphi + x \sin \varphi . i + y \sin \varphi . j + z \sin \varphi . k. \quad (\text{A.9})$$

Annexe B

Dérivée d'une matrice de rotation

Soit une matrice de rotation dépendante du temps $R = R(t)$. Compte tenu de l'orthogonalité de R (cf. Propriété 1.1.1), on a la relation suivante

$$R(t)R^T(t) = \mathbb{I}, \quad (\text{B.1})$$

qui, différenciée par rapport au temps, donne

$$\dot{R}(t)R^T(t) + R(t)\dot{R}^T = 0. \quad (\text{B.2})$$

Posons

$$S(t) = \dot{R}(t)R^T(t), \quad (\text{B.3})$$

la matrice S de dimension (3×3) est antisymétrique puisque

$$S(t) + S^T(t) = 0. \quad (\text{B.4})$$

Une multiplication à droite de (B.3) par $R(t)$ donne

$$\dot{R}(t) = S(t)R(t). \quad (\text{B.5})$$

L'équation (B.5) relie la matrice de rotation R à sa dérivée au moyen de l'opérateur antisymétrique S , ce ci a une interprétation physique significative. Considérons un vecteur constant p' et

le vecteur $p(t) = R(t)p'$. Ainsi la dérivé par rapport au temps de $p(t)$ est

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= \dot{R}(t)p', \\ &= S(t)R(t)p'.\end{aligned}\tag{B.6}$$

Il est bien connu en mécanique que si p un vecteur en rotation autour d'un axe avec une vitesse angulaire ω alors on a :

$$\dot{p}(t) = \omega(t) \times R(t)p'.\tag{B.7}$$

Ainsi, l'opérateur matriciel $S(t)$ décrit le produit vectoriel entre le vecteur ω et le vecteur $R(t)p'$.

La matrice $S(t)$ est alors le tenseurs de vitesse angulaire défini comme suit :

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix},\tag{B.8}$$

avec $\omega(t) = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$.

Ainsi

$$\dot{R} = S(\omega)R.\tag{B.9}$$

Annexe C

Génération de trajectoire

Définition 9. *Un chemin entre une situation initiale X_I et une situation finale X_F est une représentation géométrique du déplacement du corps qui ne considère pas le temps. Soit u un paramètre tel que ($u \in [u_{\min}, u_{\max}]$), le chemin est défini par une fonction continue $\mathcal{P}(u)$ de $[u_{\min}, u_{\max}]$ dans \mathbb{R}^n telle que $\mathcal{P}(u_{\min}) = X_I$, $\mathcal{P}(u_{\max}) = X_F$ et n la dimension de l'espace considéré.*

L'abscisse curviligne d'un chemin de classe C^1 et régulier (vecteur dérivé non nul en chaque point) permet de paramétrer un chemin par sa longueur. L'abscisse curviligne s d'un chemin \mathcal{P} est la fonction strictement croissante de $[u_{\min}, u_{\max}]$ dans \mathbb{R} telle que si u_0 et u_1 sont deux éléments de $[u_{\min}, u_{\max}]$ vérifiant $u_0 < u_1$, alors $s(u_1) - s(u_0)$ est la longueur du chemin \mathcal{P} de u_0 à u_1 (cf. Figure C.2) :

$$s(u_1 - u_0) = \int_{u_0}^{u_1} \left\| \frac{d\mathcal{P}(u)}{du} \right\| du. \quad (\text{C.1})$$

Cependant cette intégrale est généralement très difficile à calculer.

Un chemin de X_I à X_F peut être également représenté par une suite de sous chemins définis entre des points du chemin. Par exemple si X_1 et X_2 sont des points du chemin (X_I, X_F) , ils permettent de définir trois sous chemins : (X_I, X_1) , (X_1, X_2) et (X_2, X_F) . Deux classes de chemins définies par une série de points sont très souvent rencontrés : l'interpolation et l'approximation (figure 2.9). L'interpolation consiste à générer un chemin passant par l'ensemble des points intermédiaires tandis que l'approximation consiste à calculer un chemin passant proche des points intermédiaires.

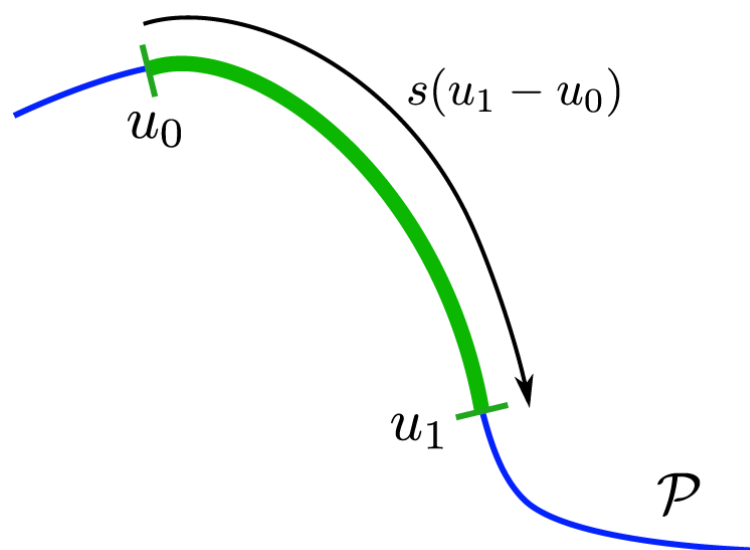


FIGURE C.1 – L'abscisse curviligne orientée

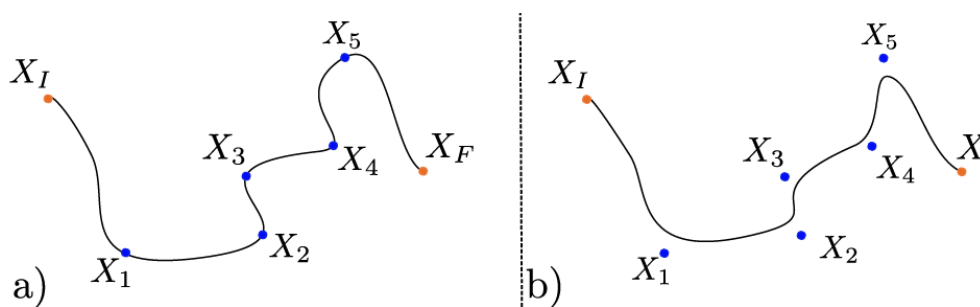


FIGURE C.2 – Un chemin interpolé (a) et un chemin approché (b).

Définition 10. Un mouvement (ou trajectoire) caractérise le déplacement d'un repère au cours du temps et est défini par un chemin \mathcal{P} et une loi d'évolution continue $u(t)$. Une trajectoire $TR(t)$ représentant un déplacement de X_I à X_F sur le chemin \mathcal{P} est une fonction continue du temps t tel que $t \in [t_I, t_F]$:

$$TR(t) = \mathcal{P}(u(t)), \quad (\text{C.2})$$

avec $u(t)$ est une fonction continue de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $TR(t_I) = X_I$ et $TR(t_F) = X_F$.

Génération de mouvement dans l'espace articulaire

Soit un robot à n degrés de liberté. Soient q_i et q_f les vecteurs des coordonnées articulaires initiales et finales respectivement. Soient k_v le vecteur vitesse maximal et k_a le vecteur accélération maximal. k_v est calculé en fonction des caractéristiques des actionneurs et des rapports de réduction des organes de transmission et k_a est calculé en fonction du rapport des couples moteurs maximaux aux inerties maximales.

le mouvement interpolé entre q_i et q_f en fonction du temps t est décrit par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} q &= q_i + r(t)D \quad \text{pour } 0 \leq t \leq t_f, \\ \dot{q}(t) &= \dot{r}(t)D, \\ \text{avec } D &= q_f - q_i. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$r(t)$ est une fonction d'interpolation telle que : $r(0) = 0$ et $r(t_f) = 1$. On peut alors écrire l'équation (C.3) comme suit :

$$q(t) = q_f(t) - [1 - r(t)]D. \quad (\text{C.4})$$

Plusieurs fonctions permettent de satisfaire le passage par q_i à $t = 0$ et par q_f à $t = t_f$.

Interpolation polynomiale

Les 3 modes les plus courants sont l'interpolation linéaire, l'interpolation cubique et l'interpolation de degré 5 appelée quintique.

Interpolation linéaire

C'est la plus simple. L'équation du mouvement s'écrit :

$$q(t) = q_i + \frac{t}{t_f} \cdot D. \quad (C.5)$$

Cette loi de mouvement impose une vitesse constante le long de la trajectoire. Elle est continue en position et discontinue en vitesse. On en déduit la fonction d'interpolation :

$$r(t) = \frac{t}{t_f}. \quad (C.6)$$

La loi est continue en position, mais discontinue en vitesse et accélération.

Interpolation cubique

Si l'on impose une vitesse nulle aux points de départ et d'arrivée, on rajoute deux contraintes supplémentaires par rapport à l'interpolation linéaire. Afin de satisfaire ces 4 contraintes

$$\begin{aligned} q(t_0) &= q_i, & \dot{q}(t_0) &= v_0, \\ q(t_f) &= q_f, & \dot{q}(t_f) &= v_f. \end{aligned} \quad (C.7)$$

le degré minimal du polynôme est de 3. La forme générale de la trajectoire cubique est donnée par l'équation suivante :

$$q(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3. \quad (C.8)$$

La vitesse est donnée par

$$\dot{q}(t) = a_1 + 2a_2 \cdot t + 3a_3 \cdot t^2. \quad (C.9)$$

En combinant les deux equations avec les 4 contraintes on obtient

$$q_0 = a_0 + a_1 \cdot t_0 + a_2 \cdot t_0^2 + a_3 \cdot t_0^3, \quad (\text{C.10})$$

$$v_0 = a_1 + 2a_2 \cdot t_0 + 3a_3 \cdot t_0^2, \quad (\text{C.11})$$

$$q_f = a_0 + a_1 \cdot t_f + a_2 \cdot t_f^2 + a_3 \cdot t_f^3, \quad (\text{C.12})$$

$$v_f = a_1 + 2a_2 \cdot t_f + 3a_3 \cdot t_f^2. \quad (\text{C.13})$$

Interpolation quintique

Si de plus l'on impose une condition initiale et finale sur l'accélération, on rajoute comme ça deux contraintes supplémentaires par rapport à l'interpolation cubique

$$\begin{aligned} q(t_0) &= q_i, & \dot{q}(t_0) &= v_0, & \ddot{q}(t_0) &= \alpha_0, \\ q(t_f) &= q_f, & \dot{q}(t_f) &= v_f, & \ddot{q}(t_f) &= \alpha_f. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Dans ce cas on a 6 contraintes, ainsi on a besoin d'un polynôme de degré 5

$$q(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3 + a_4 \cdot t^4 + a_5 \cdot t^5. \quad (\text{C.15})$$

On aura alors

$$q_0 = a_0 + a_1 \cdot t_0 + a_2 \cdot t_0^2 + a_3 \cdot t_0^3 + a_4 \cdot t_0^4 + a_5 \cdot t_0^5, \quad (\text{C.16})$$

$$v_0 = a_1 + 2a_2 \cdot t_0 + 3a_3 \cdot t_0^2 + 4a_4 \cdot t_0^3 + 5a_5 \cdot t_0^4, \quad (\text{C.17})$$

$$\alpha_0 = 2a_2 + 6a_3 t_0 + 12a_4 \cdot t_0^2 + 20a_5 \cdot t_0^3, \quad (\text{C.18})$$

$$q_f = a_0 + a_1 \cdot t_f + a_2 \cdot t_f^2 + a_3 \cdot t_f^3 + a_4 \cdot t_f^4 + a_5 \cdot t_f^5, \quad (\text{C.19})$$

$$v_f = a_1 + 2a_2 \cdot t_f + 3a_3 \cdot t_f^2 + 4a_4 \cdot t_f^3 + 5a_5 \cdot t_f^4, \quad (\text{C.20})$$

$$\alpha_f = 2a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 \cdot t_f^2 + 20a_5 \cdot t_f^3. \quad (\text{C.21})$$

Loi Bang-Bang

Dans ce cas le mouvement est représenté par une phase d'accélération constante jusqu'à $\frac{t_f}{2}$, suivi par une phase de décélération constante. Les conditions initiales et finales de la vitesse sont nulles. Le mouvement est donc continu en position et en vitesse et discontinu en accélération.

La position est donnée par l'ensemble des relations suivantes :

$$q(t) = q_i + 2 \cdot \left(\frac{t}{t_f}\right)^2 \cdot D \quad \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{t_f}{2}, \quad (\text{C.22})$$

$$q(t) = q_i + \left[-1 + 4 \cdot \frac{t}{t_f} - 2 \cdot \left(\frac{t}{t_f}\right)^2 \right] \cdot D \quad \text{pour } \frac{t_f}{2} \leq t \leq t_f. \quad (\text{C.23})$$

Loi de Trapèze

Cette loi n'est qu'une modification de la loi de « Bang-Bang » sur les propriétés de vitesse. En effet c'est la saturation de la vitesse en un temps minimum (pente de vitesse très raide). Cette modification crée un passage constant en vitesse (c.à.d. accélération nulle). De ce fait cette méthode optimise considérablement le temps par rapport à la loi de bang-bang (elle est appelée souvent loi bang- bang avec palier de vitesse). Cette loi est la plus optimale en temps et parmi celles qui assurent la continuité en vitesse.

Annexe D

Souplesse mécanique et contrôle d'impédance

Définition 11. – *La souplesse mécanique ou compliance désigne la qualité physique permettant d'accomplir des mouvements avec la plus grande amplitude et aisance possible, que ce soit d'une manière active c'est-à-dire en mouvement dynamique ou passive c'est-à-dire sans mouvement dynamique.*

– *On peut définir la souplesse mécanique comme la capacité qu'a le manipulateur de réagir aux forces d'interactions, l'objectif est d'assurer un mouvement souple de l'organe terminal (effecteur) dans la base des coordonnées cartésienne pour les robots manipulateurs qui bouge dans un environnement contraint.*

la souplesse mécanique de l'organe terminal du robot peut être décrite par la matrice de raideur U_K , ou la matrice de souplesse U_S , qui relie les forces $\begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}^T$ et les moments $\begin{bmatrix} M_x & M_y & M_z \end{bmatrix}^T$ au déplacement de translation $d = \begin{bmatrix} d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}^T$ et de rotation $\theta = \begin{bmatrix} \theta_x & \theta_y & \theta_z \end{bmatrix}^T$

subis par l'organe terminal [111]. Toutes ces quantités sont exprimées dans la base de coordonnées U attachée à l'effecteur cf. [112].

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} & \kappa_{14} & \kappa_{15} & \kappa_{16} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} & \kappa_{24} & \kappa_{25} & \kappa_{26} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} & \kappa_{34} & \kappa_{35} & \kappa_{36} \\ \kappa_{41} & \kappa_{42} & \kappa_{43} & \kappa_{44} & \kappa_{45} & \kappa_{46} \\ \kappa_{51} & \kappa_{52} & \kappa_{53} & \kappa_{54} & \kappa_{55} & \kappa_{56} \\ \kappa_{61} & \kappa_{62} & \kappa_{63} & \kappa_{64} & \kappa_{65} & \kappa_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}, \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

Les matrices de raideur et de souplesse varient selon la configuration ou en fonction du temps si le robot est en mouvement. Les déplacements de translation et d'orientation sont donc prises pour désigner des déplacements infinitésimales à un instant ou une configuration donnés. On note que la matrice de souplesse est l'inverse de celle de raideur.

Remarque 11.

- La matrice de souplesse est l'inverse de la matrice de raideur.
- On peut voir qu'une force appliquée dans une direction induit un déplacement pas seulement suivant la même direction mais aussi dans les autres directions, comme l'indiquent les éléments non diagonaux de la matrice de raideur.
- Les éléments non diagonaux de la matrice de raideur et de souplesse montre le couplage entre le mouvement et/ou la force suivant un axe et le mouvement et/ou la force suivant une autre direction ou axe. Par exemple, κ_{12} (ou s_{12}) relie la force suivant la direction de x (ou y) au déplacement suivant la direction de y (ou x).
- Les grandeurs et les signes de ces éléments non diagonaux peuvent être les facteurs déterminants pour fournir la meilleure souplesse mécanique.

Plusieurs propriétés découlent de la définition et de la signification physique des matrices de raideurs et de souplesse.

Caractéristiques des matrices de raideur et de souplesse

Symétrie

La symétrie se traduit par : si une force est appliquée suivant la direction x cause un déplacement unitaire suivant la direction y , alors la même force appliquée suivant y cause un déplacement unitaire suivant la direction x . Ce ci est connu comme le théorème de réciprocité de Betti [113].

Les matrices de raideur et de souplesse sont ainsi symétrique :

$$\kappa_{ij} = \kappa_{ji} \quad \text{et} \quad s_{ij} = s_{ji}. \quad (\text{D.3})$$

Semi-définie positive ou définie positive

La matrice de souplesse mécanique peut être semi-définie positive ou définie positive ce ci dépend si on est face à un mouvement libre ou contraint ou à un objet rigide ou déformable *etc.*

Remarque 12. Si l'objet est déformable, la souplesse mécanique du robot manipulateur signifie que l'énergie de déformation est stockée dans l'effecteur lors de l'application des forces extérieures. En absence de perte d'énergie sous la forme de frottement, amortissement *etc.*, l'énergie de déformation est égale au travail de forces appliquées sur le manipulateur. Pour un déplacement à six dimensions de l'organe terminal $(d^T \theta^T)^T$, l'énergie stockée est :

$$\frac{1}{2} (d^T \theta^T) K \begin{bmatrix} d \\ \theta \end{bmatrix} > 0 \text{ pour tout déplacements non nuls } (d^T \theta^T) \neq 0 \quad (\text{D.4})$$

L'équation (D.4) est la définition pour que la matrice K soit définie positive. Que K est définie positive, signifie que le ressort représenté emmagasine l'énergie lorsqu'il est défléchi, il ne libère pas d'énergie dans un comportement instable. La matrice de raideur K doit être définie positive si elle représente la souplesse d'une structure physique, ce qui implique qu'elle est toujours inversible et que la matrice de souplesse $S = K^{-1}$ existe et est aussi définie positive. Les propriétés de symétrie et définie positive de K et S montre que tous les éléments de la diagonale sont supérieurs à zéro et que le déterminant ainsi que les mineurs principales successives sont

aussi positifs.

$$K_{11} > 0, \quad \det \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{D.5})$$

$$\det \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} > 0, \dots, \det [K] > 0. \quad (\text{D.6})$$

La position de l'élément zéro dans les matrices S et K

Puisque les éléments non diagonaux des matrices de raideur et de souplesse représentent la relation force-déplacement le long des différentes directions, un élément non diagonal nul représente une absence de couplage et devrait par conséquent survenir aux mêmes positions ligne-colonne des matrices de raideur et de souplesse. Par exemple, s'il n'y a pas de couplage de mouvement et/ou forces entre les directions de x et de y , alors $\kappa_{12} = \kappa_{21} = s_{12} = s_{21} = 0$. Les positions des éléments non nuls de la matrice de raideur et de souplesse ne suivent pas la relation réciproque parce que plusieurs forces peuvent causer un déplacement dans la même direction et vis-versa. Bien que ces propriétés ne permettent pas de déterminer des valeurs précises, ils sont utiles pour déterminer les plages réelles des valeurs et de vérifier la validité d'une matrice de raideur proposée. D'autres propriétés des matrices de raideur et de souplesse sont analysées par Lencaric [114] en utilisant l'Algèbre de Lie et par Patterson et Lipkin [115, 116] par le biais de l'utilisation des torseurs.

Classification du mouvement souple

Deux groupes de concept pour le mouvement souple peuvent être distingués [117]

1. **Souplesse passive** Pour la quelle la position de l'organe terminal est fournie par les forces de contacts, ce ci est due à la compliance liée à la structure mécanique du robot, à l'asservissements ou à des dispositifs specials souples.

La méthode de compliance passive peut être classifiée comme étant adaptable ou non-adaptable voir la Figure D.1.

(a) Souplesse passive fixée :

- Les méthode liées à la souplesse de la structure mécanique du robot telle que l'élasticité du bras, des articulations ainsi que de l'organe terminal[118].

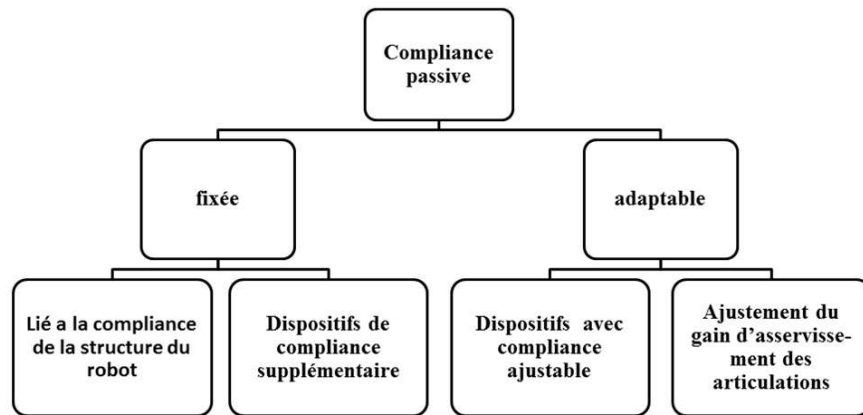


FIGURE D.1 – Classification de la souplesse passive

- Les méthodes basées sur l'utilisation des structures déformables spécialement construites attachées au niveau de l'organe terminal. Le plus connu et le plus utilisé est sans doute le RCC (c'est-à-dire Remote Center Compliance) [119].

(b) Souplesse passive adaptable

- Les méthodes basées sur l'utilisation des dispositifs avec souplesse ajustable [120].
- Les Méthodes basées sur l'ajustement du gain d'asservissements des articulations[121].

2. la méthode **active** : Pour la quelle la compliance est fournie par la construction d'une boucle de rétroaction de force. Ce qui signifie un contrôle directe des forces d'interaction. Les méthodes de contrôle de force actives peuvent être divisées en deux groupes

(a) Force, en général ce la veut dire le contrôle de position/force ou le contrôle d'admittance, tel que les forces d'interaction désirées ainsi que la position du robot sont contrôlées. Cette méthode peut être divisée en :

- Le contrôle hybride de position/force : la force et la position sont contrôlées dans deux sous espaces orthogonal.
- Le contrôle de position/force unifié qui diffère essentiellement du contrôle hybride classique défini ci dessus. Vukobratovic et al [122] ont établi une approche pour controller simultanément la force et la position. Cette méthode définit deux sous tâches de contrôle chargées d'assurer la stabilité de la position du robot et celle de la force d'interaction. Ces deux sous tâches utilisent les modèles dynamiques du robot et de l'environnement, afin d'assurer le suivi de la force et du mouvement.

(b) Contrôle d'impédance voir Figure D.2 : il utilise les différentes relations entre les forces agissant sur le robot et la position du manipulateur, afin d'ajuster l'impédance

mécanique de l'organe terminal. Le problème du contrôle d'impédance peut être définie comme une exigence de conception d'un dispositif de commande de telle sorte que les forces d'interactions régissent la différence entre les positions nominales et réelles de l'organe terminal selon la loi d'impédance. Le contrôle d'impédance est essentiellement basé sur le contrôle de position et nécessite les consignes ainsi que les mesures de position afin de fermer la boucle de rétroaction. En outre, les mesures de force sont nécessaires pour réaliser le comportement d'impédance désiré. Il existe trois types de contrôle d'impédance

- Contrôle de raideur [123] : qui permet de contrôler les réactions du robot dues aux forces de contact. La formulation du contrôle de raideur se base sur la relation de proportionnalité force/position $F = K \cdot \Delta x$.
- Contrôle d'amortissement [119] basé sur la relation de proportionnalité force/vitesse $F = K \cdot \Delta \dot{x}$.
- Contrôle d'impédance généralisé [46] considérant la relation liant la force, position, vitesse et accélération $F = M \cdot \Delta \ddot{x} + D \cdot \Delta \dot{x} + K \cdot \Delta x$.

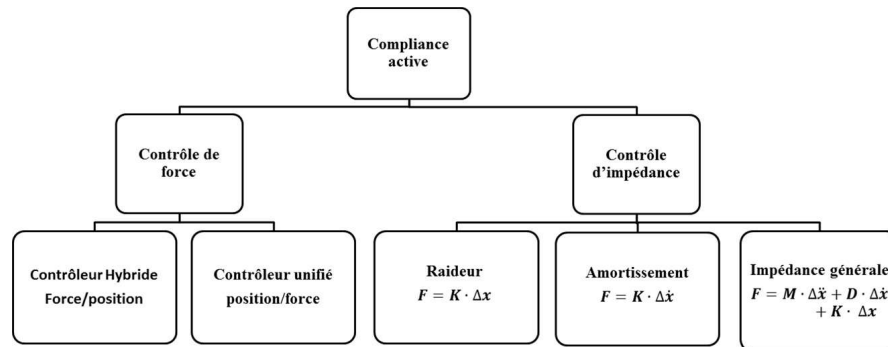


FIGURE D.2 – Classification des méthodes de commande de souplesse active

L'espace des articulations par rapport à l'espace opérationnel

Voir [124], En général le contrôle des manipulateurs est réalisé dans l'espace des articulations c'est-à-dire l'espace des actionneurs. Les variables d'articulation tels que position, couple *etc* sont utilisées comme rétroaction pour contrôler la position et la force de chaque articulations et ainsi ils servent à estimer les positions et les forces de l'organe terminal(effecteur) du robot. Ce qui conduit à l'inconvénient de contrôler en boucle ouverte les variables de l'espace opérationnel, de sorte que les incertitudes mécanique et les imprécision du contrôleur sont laissées à l'extérieur de la boucle de commande. Cependant, l'approche de commande dans l'espace des

articulations a l'avantage de garder la conception mécanique du manipulateur simple et inhérente à la conception. D'autre part, l'utilisation d'un transducteur pour mesurer les variables d'articulation est si simple en comparaison a celle pour la mesures des variables de l'espace des tâches qui est complexe et coûteuse. Un autre inconvénient du contrôle dans l'espace des tâches est la complexité de l'algorithme de la commande puisque la cinématique inverse devient une partie de la boucle de commande.

Le modèle dynamique du manipulateur mécanique dans l'espace des articulations est calculé soit à l'aide de la méthode de Lagrange soit par celle de Newton-Euler (voir le paragraphe 1.2.3).

L'équation dynamique d'un robot manipulateur à n DDLs peut s'écrire

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau + \tau_e, \quad (\text{D.7})$$

où $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ et $\ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ correspondent respectivement aux vecteurs des vitesses et des accélérations. Le vecteur des commandes est donné par $\tau + \tau_e$ qui est la somme des couples des actionneurs et ceux appliqués par l'environnement. $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$ est la matrice des termes d'inertie, $C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur contenant les forces centrifuges et de Coriolis, $g(q) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de forces dues à la gravité.

Remarque 13. *Les forces non-conservatives, tel que statique, frottement visqueux etc sont ignorées dans la modélisation (D.7). Seule le comportement idéale du manipulateur est considéré, et telles caractéristiques non linéaires vont êtres compensées dans la simulation numérique.*

Dans le but du contrôle d'impédance, on définit les paramètres d'impédances dans l'espace opérationnel et puis on les transmet à l'espace des articulations. Dans ce cas on muni le manipulateurs de capteur de force d'articulation (wrist force sensor), qui malgré la difficulté d'installation, il fournit une mesure exacte des forces de contact.

Dans l'espace opérationnel l'équation (D.7) est équivalente à

$$M_x(x)\ddot{x} + C_x(x, \dot{x})\dot{x} + g_x(x) = f + f_e, \quad (\text{D.8})$$

où $\dot{x} \in \mathbb{R}^m$ et $\ddot{x} \in \mathbb{R}^m$ correspondent respectivement aux vecteurs des vitesses et des accélérations des effecteurs du robot. $f = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de forces appliquées aux effecteurs et $f_e \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de forces de l'environnement appliquées aux effecteurs.

$M_x(x) \in \mathbb{R}^{m \times m} > 0$ est la représentation de la matrice des termes d'inertie dans l'espace opérationnel, $C_x(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est la représentation du vecteur contenant les forces centrifuges et de Coriolis, $g_x(x) \in \mathbb{R}^m$ est la représentation du vecteur de forces dues à la gravité.

La relation entre les paramètres de l'espace opérationnel et ceux de l'espace d'articulation est donnée par

$$M_x = (J \cdot M^{-1} \cdot J^T)^{-1}, \quad (\text{D.9})$$

$$C_x \dot{x} = M_x \cdot J \cdot M^{-1} \cdot C \dot{q} - M_x \cdot \dot{J} \cdot \dot{q}, \quad (\text{D.10})$$

$$g_x = M \cdot J \cdot M^{-1} \cdot g. \quad (\text{D.11})$$

La relation générale s'écrit comme suit

$$\dot{x} = J \cdot \dot{q}, \quad (\text{D.12})$$

$$\tau = J^T \cdot f, \quad (\text{D.13})$$

tel que J est la matrice Jacobienne du robot manipulateur. Une approximation utile de (D.12) est donnée par

$$\Delta x = J \Delta q. \quad (\text{D.14})$$

Cette approximation est utile pour des petites valeurs de Δ .

Contrôle d'impédance

Définition 12. *L'impédance mécanique : c'est la mesure de la résistance en mouvement d'un corps soumis à une force. En effet l'impédance mécanique dans un port (notée Z) est un opérateur dynamique qui détermine une force de sortie (couple) dépendant du temps à partir d'une vitesse d'entrée (vitesse angulaire) au même port. L'admittance mécanique en un port (notée Y) est un opérateur dynamique qui détermine une vitesse de sortie (vitesse angulaire) à partir d'une force (couple) dépendante du temps dans le même port. Si le système est linéaire, l'admittance est l'inverse de l'impédance, et les deux peuvent être représentés dans le domaine de Laplace par des fonctions de transfert, $Z(s)$ ou $Y(s)$.*

Le contrôle d'impédance ne vise pas à réguler la force ou la position mais à réguler les relations statiques et dynamiques entre les deux. En effet pour les tâches et les applications nécessitant

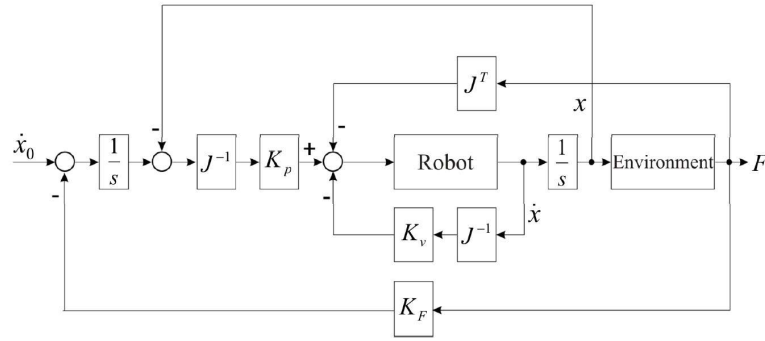


FIGURE D.3 – Contrôle d'amortissement

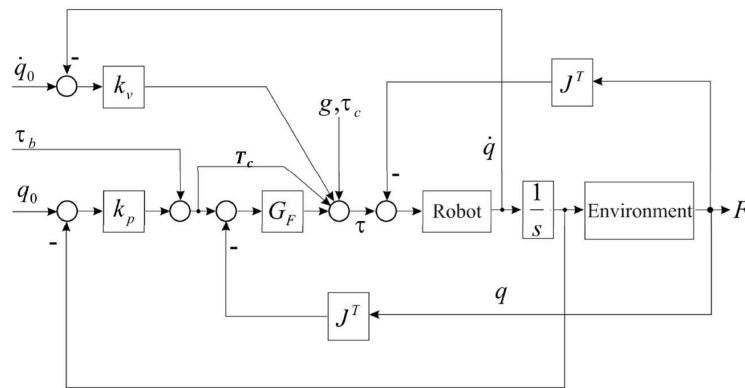


FIGURE D.4 – Contrôle de raideur

un contact entre l'effecteur et l'environnement tel que (sol, homme, obstacle *etc*), l'objectif du contrôle d'impédance est d'établir une relation dynamique désirée entre la position de l'effecteur et les forces de contact appliquées par l'environnement. Les boucles de rétroaction au niveau des articulations du manipulateur sont fermées de sorte que le robot apparaît comme impédance spécifique pour l'environnement. L'environnement à son tour se comporte comme admittance pour le robot.

Notons par x_0 la position désirée dans l'espace des tâches et q_0 celle correspondante à l'espace des articulations.

Une première approche pour le contrôle d'impédance a été proposée par [119] (Figure D.3). Dans cette approche, dénommée contrôle d'amortissement, le retour de force est fermé autour de la boucle de contrôle de vitesse. La force d'interaction est convertie en une commande de modification de vitesse par le coefficient d'amortissement constant K_f . Whitney et al ont défini

la condition de stabilité du système durant le contact comme suit

$$0 < TK_f K_e < 1, \quad (\text{D.15})$$

tel que T est la période d'échantillonnage, K_e est la raideur de l'environnement. Cette condition signifie que si k_e est élevé, le produit Tk_f doit être petit. Pour éviter des forces de contact élevé, T doit être petit.

Une deuxième approche a été proposé par [123] et al. Dans cette approche ils ont présenté comment modifier la position de l'organe terminal selon la force d'interaction (Figure D.4. En effet pour que le bras se comporte avec la raideur désiré Salisbury ajoute un biais de force, F_B , ainsi le couple de commande est comme suit

$$T_c = K_p \delta q + T_B \quad (\text{D.16})$$

, tel que $\tau_b = J^T F_B$.

Modèle d'impédance

Le but principal d'un robot est qu'il doit accomplir certaines tâches de manipulation. On peut distinguer deux classes majeures de ces tâches qui sont des tâches sans contact et avec contact. Une large variété d'applications robotiques nécessite que le robot entre en contact avec un environnement. Dans ce cas, le contrôle de la force du manipulateurs dans l'espace opérationnel devient essentiel. Pour la méthode de contrôle de force, le manipulateur reçoit comme entré la force dans l'espace opérationnel au lieu de la position ou de la vitesse. En pratique, le contrôle de position associé au contrôle de force est désiré ce ci est connu par le contrôle hybride force/-position.

Le contrôle d'impédance fournit une approche fondamentale pour contrôler un robot industriel rigide interagissant avec l'environnement. L'objectif principal du contrôle d'impédance est de réduire l'impédance de contact (raideur) du robot contrôlé en position et ce ci en contrôlant la réaction de la dynamique du robot avec les forces d'interaction (souplesse du robot). L'objectif de commande du contrôle d'impédance diffère des objectifs de commande classiques dans le sens où le problème principal de commande n'est pas d'assurer le suivi d'un consigne de référence (*e.g.* position nominale ou force), mais plutôt de réaliser un modèle cible de référence

spécifiant l'interaction entre le robot et l'environnement, c'est à dire la relation souhaitée entre les forces qui agissent et le déplacement du robot.

Modèle d'impédance dans l'espace des tâches

Le robot est modélisé comme étant un système masse-ressort-amortisseur qui est une pratique courante dans la conception de contrôle d'impédance [125]. L'environnement est modélisé comme étant un système amortisseur-ressort. Dans ce modèle, $M_d \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $C_d \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $K_d \in \mathbb{R}^{m \times m}$ désignent respectivement l'inertie, la viscosité et la raideur de l'impédance désiré Z_d

Soient $x \in \mathbb{R}^m$ et $x_e \in \mathbb{R}^m$ la position nominale et la position mesurée du manipulateur respectivement. La relation dynamique standard reliant la la force de contact avec l'environnement f_e et le déplacement $\Delta x_d = x - x_e$ est $f_e = Z_d \Delta x_d$ tel que Z_d est l'impédance désirée. Ainsi on aura

$$f_e = M_d (\ddot{x} - \ddot{x}_e) + C_d (\dot{x} - \dot{x}_e) + K_d (x - x_e). \quad (D.17)$$

L'équation (D.17) fournit les dynamiques désirées entre la position du manipulateur et les forces de contact.

Modèle d'impédance dans l'espace des articulations

Comme discuté antérieurement, pour la plupart des manipulateurs la commande est implémentée dans l'espace des articulations. Ainsi, il est utile de discuter le modèle d'impédance dans l'espace des articulations. La relation entre la force de l'environnement et le déplacement p_e donné par l'équation

$$f_e = Z_d e_p, \quad (D.18)$$

peut être écrite comme suit

$$f_e = M_d \ddot{e}_p + C_d \dot{e}_p + K_d e_p. \quad (D.19)$$

La relation entre l'espace des articulations et l'espace opérationnel est obtenu en différenciant l'équation (D.12), ce qui donne

$$\ddot{x} = J\ddot{q} + \dot{J}\dot{q}. \quad (D.20)$$

Avec la supposition que la vitesse du robot manipulateur est petite alors le taux de variation du Jacobien est très petit, donc le deuxième terme dans l'équation (D.20) peut être ignoré. Alors

d'après les équations (D.12),(D.13) et (D.14) on a

$$\tau_e = (J^T M_d J) \Delta \ddot{q} + (J^T C_d J) \Delta \dot{q} + (J^T K_d J) \Delta q. \quad (D.21)$$

Deux types d'implementation du contrôle d'impédance sont réalisés après leurs première introduction [46]. Une basée sur le contrôle de position et l'autre sur le contrôle de force.

- **Contrôle d'impédance basé sur la position** Ce type de commande a été largement discuté par [126, 127] et [128]. Quand le robot entre en contact avec l'environnement une déflexion $\Delta x_d = x - x_e$ est calculée en utilisant l'information de la force de contact avec l'environnement f_e et la relation dynamique d'impédance désirée Z_d . Cette déflexion est ensuite soustraite de la trajectoire nominale du manipulateur afin de générer le signal de contrôle de position modifié $x_c \in \mathbb{R}^m$. Ainsi, en faisant cet ajustement de la position, la force de contact est réglée.

$$x_c = x - \Delta x_d. \quad (D.22)$$

Le signal de contrôle de position calculé en (D.22) est utilisé comme entrée du contrôleur. Ainsi l'implementation du Contrôle d'impédance basé sur la position consiste en une boucle interne de rétroaction de position associé avec une externe pour la force. Dans cette approche l'information de la force de contact est utilisée pour modifier la position désirée de l'organe terminal. En effet ce contrôle permet d'assouplir une source de position rigide. La boucle extérieure voir Figure D.5, comporte un compensateur (régulateur) de retour de force. Ce block représente l'admittance puisque son role consiste en la modification de la relation entre la force de contact et les modifications de la position nominale correspondante Δx_d . K_{px} , représente la matrice de régulation de position qui est en générale prise diagonale et $a_x \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur est le vecteur de la dynamique des actionneurs représenté dans l'espace des tâches .

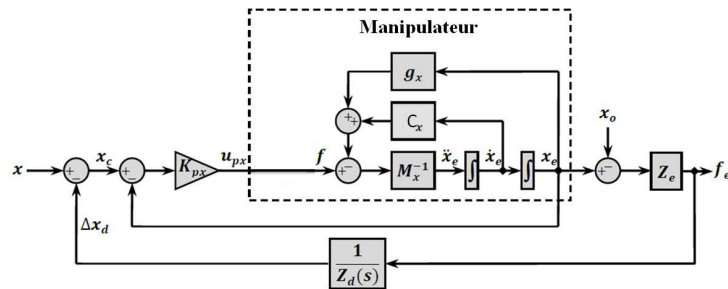


FIGURE D.5 – Contrôle d'impédance basé sur la position dans l'espace des tâches

- **Contrôle d'impédance basé sur la force** L'implémentation de ce contrôle d'impédance est moins utilisé que celui basé sur la position. En l'implémentation de ce contrôle, la trajectoire de position commandée et la relation d'impédance désirée Z_d sont utilisées pour générer un signal de force contrôlé $f_c \in \mathbb{R}^m$. il consiste en une boucle interne de rétroaction de force associée à une boucle externe de rétroaction de position. Dans cette approche voir Figure D.6, les positions sont mesurées et les commandes de forces sont émises pour satisfaire l'impédance désirée (cible). En effet ce contrôleur permet de rigidifier une source de force souple.

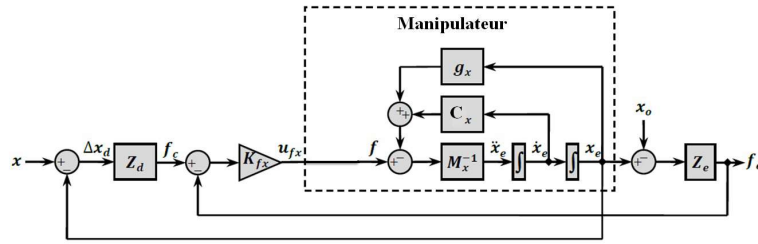


FIGURE D.6 – Contrôle d'impédance basé sur la force dans l'espace des tâches

Le contrôle d'impédance doit masquer la dynamique du manipulateur et introduire la dynamique désirée de sorte que le manipulateur se comporte comme l'impédance désirée pour l'environnement. Dans la figure Figure force, $K_{fx} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est la matrice de gain du régulateur de force, qui est généralement diagonale.

Impédance active et impédance passive pour la co-manipulation

Remarque 14. L'impédance peut être divisé en deux méthode, une passive et une active.

- Dans la méthode **passive** l'impédance mécanique désirée de l'effecteur est obtenu en utilisant seulement des éléments mécaniques comme ressort, amortisseur etc.
- la méthode **active** atteint l'impédance mécanique désirée en conduisant les actionneurs des articulations en utilisant la commande de rétroaction basée sur les mesures de position de l'effecteur ainsi que les mesures de forces de contact, vitesse ainsi de suite.

Pour le problème de co-manipulation, la vitesse ou la position de l'effecteur terminal sont liées à la force externe f_h par l'impédance mécanique Z . La force f_h est principalement due à la force humaine, y inclut toutes les forces appliquées à l'effecteur sauf ceux appliquées par les actionneurs.

L'objectif du contrôle d'impédance est d'établir une relation dynamique désirée entre la position de l'effecteur et la force de contact. Cette relation dynamique est appelé impédance cible (désirée). En general l'impédance cible est choisie d'être un système de second ordre pour imiter la dynamique d'un Masse-Ressort-Amortisseur Dans le domaine de Laplace,

$$\begin{aligned} f_h(s) &= Z(s)\dot{X}(s) \quad \text{ou} \quad f_h(s) = sZ(s)X(s), \\ \text{tel que} \quad sZ(s) &= M_d s^2 + C_d s + K_d. \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

avec

- f_h force appliquée par l'environnement(homme),
- Z : impédance désirée,
- M_d : Matrice d'inertie désirée définie positive,
- C_d : matrice d'amortissement désiré définie positive,
- K_d : matrice de raideur désiré définie positive.

Pour accomplir les besoins de la tâche de co-manipulation l'équation (D.23) s'écrit

$$f_h(s) = M_d (\ddot{X} - \ddot{X}_d) + C_d (\dot{X} - \dot{X}_d) + K_d (X - X_d), \quad (\text{D.24})$$

tel que $X - X_d$: erreur de position.

Pour un point statique, un point d'équilibre par exemple on a

$$f_h(s) = M_d \ddot{X} + C_d \dot{X} + K_d (X - X_d), \quad (\text{D.25})$$

Remarque 15. L'équation (D.23) est basée sur des systèmes physiques n'ayant pas de composants actifs. Ainsi, l'équation (D.23) peut être généralisée comme suit [129]

$$sZ(s) = \sum_{i=-n_1}^{n_2} K_i s^i, \quad (\text{D.26})$$

avec $n_1 \geq 0$ et $n_2 \geq 0$, K_i sont les paramètres d'impédance.

Quand $n_1 \neq 0$, il y'a des termes négatives, ce qui rend le système actif.

Annexe E

Lemmes usuels en commande robuste

Pôles d'un modèle linéaire de système

Soit le modèle d'état (minimal) LTI d'ordre n

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

tel que $t \in \mathbb{R}^+$ désigne le temps, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteurs des entrées et $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est le vecteur des sorties. . On rappelle que la matrice de transfert $G(s) \in \mathbb{C}^{n_y \times n_u}$ (unique) correspondant à ce système est

$$G(s) = C(s\mathbb{I}_n - A)^{-1}B + D = \frac{N(s)}{D(s)}. \quad (\text{E.2})$$

s est la variable de Laplace. $N(s) \in \mathbb{C}^{n_y \times n_u}$ est une matrice de numérateurs alors que $D(s) \in \mathbb{C}$ est un polynôme dénominateur commun aux différents transferts et appelé polynôme caractéristique. Les pôles du modèle sont les racines de $D(s)$. Ce sont aussi les valeurs propres de A . Leur localisation dans le plan complexe est essentielle :

- ils doivent être à partie réelle strictement négative pour assurer la stabilité asymptotique du système ;
- la rapidité de la réponse dépend de leur partie réelle ;
- l'amortissement de la réponse et son comportement plus ou moins oscillatoire dépend de la partie imaginaire (\pm grande devant la partie réelle).

- Le comportement du système est surtout lié aux pôles dominants (ou lents) c'est-à-dire ceux ayant la plus grande partie réelle au sens algébrique.

Inégalités matricielles

Dans cette section, par souci de simplicité, seules des matrices réelles sont considérées.

Matrices carrées définies en signe : la relation d'ordre partiel de Loëwner

Soit une matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, M est définie positive (respectivement semi-définie positive) si et seulement si

$$x^T M x > 0 \quad (\text{resp.} \geq 0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ non nul.} \quad (\text{E.3})$$

De même, on dit que M est définie négative (respectivement semi-définie négative) si et seulement si M est définie positive (resp. semi-définie positive). On note :

$$M > (\geq 0) \text{ et } M < (\leq 0). \quad (\text{E.4})$$

Il existe différents tests pour savoir si une matrice est définie en signe, notamment basés sur les calculs des mineurs de la matrice. Toutefois, nous n'aurons à manipuler que des matrices symétriques dont les valeurs propres sont réelles. Pour ces matrices, on a

$$\begin{cases} M < (\leq) 0 \Leftrightarrow \lambda_{\max}(M) < (\leq) 0 \\ M > (\geq) 0 \Leftrightarrow \lambda_{\min}(M) > (\geq) 0 \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

Ainsi toute matrice semi-définie en signe est déficiente en rang. Par ailleurs, de manière naturelle, pour un couple de matrices $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n^2}$, on définit :

$$M > (\geq) N \Leftrightarrow M - N > (\geq) 0 \quad \text{ou} \quad M < (\leq) N \Leftrightarrow M - N < (\leq) 0. \quad (\text{E.6})$$

Il existe une relation d'ordre partiel entre les matrices de même dimension, partiel simplement car, par exemple une matrice symétrique peut ne pas être définie en signe (c'est-à-dire avoir des valeurs propres négatives et positives). On parle parfois de la relation d'ordre partiel de Loëwner. Une matrice symétrique définie en signe peut s'exprimer elle même en fonction d'autres matrices qui représentent des éléments inconnus de l'expression. On parle alors d'inéquations matricielles, ou, de manière plus habituelle mais quelque peu impropre, d'inégalités matricielles.

Les LMI

Il s'agit d'inégalités matricielles dans lesquelles les deux membres ont une expression affine par rapport aux inconnues. On appelle ces inégalités LMI, acronyme de Linear Matrix Inequality. Les techniques d'optimisation dites de point intérieur permettent aujourd'hui d'obtenir numériquement une solution à la LMI (c'est-à-dire un jeu de variables qui vérifie la LMI), si elle existe. Des logiciels et boîtes à outils, utilisant par exemple le noyau de Matlab, permettent d'envisager ce type de problèmes.

Définition 13. On appelle *inégalité matricielle affine* (ou *inégalité matricielle linéaire* et en anglais *linear matrix inequality*, noté *LMI*) le problème suivant : étant données les matrices réelles, carrées et symétriques $M_k, k = 1..n$, trouver les réels $x_k, k = 1..n$ tels que $M_0 + x_1 M_1 + \dots + x_n M_n > 0$.

Les LMI ne se présentent pas directement sous la forme de l'inégalité présentée ci-dessus. Prenons un exemple classique de l'automatique : la stabilité de Lyapunov pour un système linéaire

Théorème 14. Soit le système autonome :

– à temps continu

$$\dot{x} = Ax \quad \text{tel que} \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{E.7})$$

– respectivement à temps discret :

$$x_{k+1} = Ax_k \quad \text{tel que} \quad x_k \in \mathbb{R}^n \quad (\text{E.8})$$

Ce système est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vérifiant l'inégalité :

$$A^T P + PA < 0, \quad (\text{E.9})$$

respectivement

$$-P + A^T P A < 0. \quad (\text{E.10})$$

Ces inéquations sont appelées *inégalités de Lyapunov*. Dans le cas continu, c'est une LMI en A ou en P . Dans le cas discret, c'est une LMI en P mais non en A .

Normes des systèmes LTI

Valeurs singulières

Les valeurs singulières d'une matrice complexe M sont les racines carrées des valeurs propres de $M^H M$ tq M^H est le Hermitien (transposé conjugué) de M . On les note $\sigma_i(M)$. Si M est Hermitienne, ses valeurs singulières sont égales aux valeurs absolues de ses valeurs propres, qui sont elles mêmes réelles.

Proposition 15. – *Les valeurs singulières sont des nombres réels positifs.*

– *Les valeurs singulières non nulles de M sont identiques à celles de M^H (invariance par l'opération transposé/conjugué)*

Proposition 16. *La valeurs singulières maximale elle est appelé norme-2, norme \mathcal{L}_2 ou norme spectrale. Elle est telle que*

$$\bar{\sigma}(M) = \|M\|_2 = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \left(\frac{\|Mx\|_2}{\|x\|_2} \right) = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \sqrt{\frac{x^* M^* M x}{x^* x}} \quad (\text{E.11})$$

tel que M^* est la transposée conjuguée de la matrice M .

Définition 17. Normes \mathcal{L}_2 sur les signaux Pour un signal $x(t)$ à valeur dans \mathbb{R}^n , la norme \mathcal{L}_2 est définie par :

$$\|x(t)\|_{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\int_0^\infty x^T(t)x(t) dt} \quad (\text{E.12})$$

Définition 18. Norme \mathcal{H}_∞ sur les systèmes Pour un système de fonction de transfert $G(s)$, la norme \mathcal{H}_∞ est définie comme la norme induite ;par la norme \mathcal{L}_2 sur les signaux. c'est-à-dire que si $u(t)$ est appliquée en entrée de $G(s)$ et que $y(t)$ est relevé en sortie(On considère des conditions initiales nulles), on a :

$$\|G(s)\|_\infty = \max \frac{\|y(t)\|_{\mathcal{L}_2}}{\|u(t)\|_{\mathcal{L}_2}} \quad (\text{E.13})$$

Ainsi, la norme \mathcal{H}_∞ est l'amplification maximale d'un signal par un système.

Lemmes de simplifications

Lemme 2. *Complément de Schur* Il s'agit d'un résultat préliminaire qui permettra, dans ce qui suit, de simplifier des expressions matricielles.

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R < 0 \\ Q - SR^{-1}S^T < 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R > 0 \\ Q - SR^{-1}S^T > 0 \end{cases} \quad (\text{E.14})$$

Lemme 3. *Lemme de Finsler* Etant données les matrices A et B ; les conditions suivantes sont équivalentes

1. $x^T Ax > 0$ pour tout $x \neq 0$ tel que $Bx = 0$
2. $\tilde{B}^T A \tilde{B} > 0$ tel que $B\tilde{B} = 0$
3. $A + \lambda B^T B > 0$ pour un scalaire λ
4. $A + XB + B^T X^T > 0$ pour une matrice X

Analyse des systèmes lineaires

Le système $\dot{x} = Ax$ est stable si et seulement si il existe une matrice définie positive Q vérifiant le système LMI suivant :

$$Q > 0 \quad (\text{E.15})$$

$$A^T Q + QA < 0 \quad (\text{E.16})$$

Cette stabilité (quadratique de Lyapunov) est équivalente à la stabilité au sens de Hurwitz dont le critère est que la matrice A ait ses valeurs propres à partie réelle positive.

Remarque 16. Commande Matlab : Les fonctions suivantes font partie de la Robust Control Toolbox et permettent de tester la stabilité quadratique. Elles sont valables pour des systèmes LPV et donc aussi pour des systèmes LTI.

- **quadstab** analyse la stabilité quadratique des systèmes dynamiques à temps continu et à temps discret. Les systèmes descripteurs (du type $E\dot{x} = Ax$) qui vont être utile dans l'études des systèmes LPV sont également supportés.
- **decay** calcule le taux de décroissance maximal de la fonction de Lyapunov.

Lemme 4. *Lemme borné réel 1* Un système dynamique continu linéaire de matrices d'état A, B, C et D a une norme \mathcal{H}_∞ inférieure à γ si et seulement si il existe une matrice $Q = Q^T$ vérifiant :

$$Q > 0, \quad (\text{E.17})$$

$$\begin{bmatrix} A^T Q + QA + C^T C & QB + C^T D \\ B^T Q + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{E.18})$$

On peut appliquer le lemme borné réel pour le calcul de la norme \mathcal{H}_∞ d'un système linéaire en résolvant un problème de valeurs propres généralisées suivant : trouver les matrices $Q = Q^T$ et $R = R^T$ minimisant $\lambda = \gamma^2$ et vérifiant :

$$Q > 0, \quad (\text{E.19})$$

$$\begin{bmatrix} A^T Q + QA + C^T C & QB + C^T D \\ B^T Q + D^T C & D^T D \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}, \quad (\text{E.20})$$

$$R < \lambda I. \quad (\text{E.21})$$

Lemme 5. *Lemme borné réel 2* Un système dynamique continu linéaire de matrices d'état A, B, C et D a une norme \mathcal{H}_∞ inférieure à γ si et seulement si il existe une matrice $Q = Q^T$, vérifiant :

$$Q > 0, \quad (\text{E.22})$$

$$\begin{bmatrix} A^T Q + QA & QB & C^T \\ B^T Q & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{E.23})$$

Système linéaire à paramètres variants (LPV)

Dans un système LPV, les matrices d'état A, B, C et D dépendent d'un vecteur des paramètres ρ qui peut varier en fonction du temps.

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\rho)x + B(\rho)u \\ y = C(\rho)x + D(\rho)u \end{cases} \quad (\text{E.24})$$

A défaut de connaître à l'avance la trajectoire de ρ , on connaît souvent des bornes sur ses différentes composantes : $\rho_{k_{min}} < \rho_k < \rho_{k_{max}}$ et peut être aussi sur les vitesses de variation : $\dot{\rho}_{k_{min}} < \dot{\rho}_k < \dot{\rho}_{k_{max}}$. Ainsi les ensembles admissibles pour les vecteurs ρ et $\dot{\rho}$ sont les hyper rectangles E_ρ et $E_{\dot{\rho}}$ qui sont générés par l'ensemble des sommets E_ρ^s et $E_{\dot{\rho}}^s$

Le vecteur des paramètres peut être vu comme une entrée supplémentaire du système qui ne rentre alors plus dans la classe des systèmes linéaires. Parmi les systèmes LPV, certains types particuliers sont intéressants à étudier : les systèmes LPV affines, LPV polytopiques et les représentations linéaires fractionnaires).

Description affine d'un système LPV

Dans ce cas, la dépendance des matrices d'état en fonction des paramètres est linéaires. Notons

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (\text{E.25})$$

On a alors $M(\rho) = M_0 + \rho_1 M_1 + \rho_2 M_2 \dots$. Remarquez que le produit ou l'interconnexion de deux modèles LPV affines n'est généralement pas un modèle LPV affine, mais plutôt un modèle LPV avec dépendance quadratique en fonction des paramètres.

Description polytopique d'un système LPV

La matrice M représentant le système est une combinaison barycentrique de plusieurs matrices M_1^s, M_2^s, \dots c'est-à-dire $M = \alpha_1 M_1^s + \alpha_2 M_2^s + \dots$, avec $0 \leq \alpha_k \leq 1$ et $\sum \alpha_k = 1$. Un système LPV affine dont les paramètres varient sur des intervalles connus peut être considéré comme un système polytopique. Traitons l'exemple d'un système dépendant d'une manière affine de deux paramètres $M(\rho) = M_0 + \rho_1 M_1 + \rho_2 M_2$ et notons M_1^s, M_2^s, M_3^s et M_4^s ses sommets :

$$\begin{cases} M_1^s = M_0 + \rho_1^{min} M_1 + \rho_2^{min} M_2 \\ M_2^s = M_0 + \rho_1^{max} M_1 + \rho_2^{min} M_2 \\ M_3^s = M_0 + \rho_1^{min} M_1 + \rho_2^{max} M_2 \\ M_4^s = M_0 + \rho_1^{max} M_1 + \rho_2^{max} M_2 \end{cases} \quad (\text{E.26})$$

Construisons maintenant le système polytopique $\tilde{M} = \alpha_1 M_1^S + \alpha_2 M_2^S + \alpha_3 M_3^S + \alpha_4 M_4^S$, avec

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\rho_1^{\max} - \rho_1}{\rho_1^{\max} - \rho_1^{\min}} \frac{\rho_2^{\max} - \rho_2}{\rho_2^{\max} - \rho_2^{\min}} \\ \alpha_2 = \frac{\rho_1 - \rho_1^{\min}}{\rho_1^{\max} - \rho_1^{\min}} \frac{\rho_2^{\max} - \rho_2}{\rho_2^{\max} - \rho_2^{\min}} \\ \alpha_3 = \frac{\rho_1^{\max} - \rho_1}{\rho_1^{\max} - \rho_1^{\min}} \frac{\rho_2 - \rho_2^{\min}}{\rho_2^{\max} - \rho_2^{\min}} \\ \alpha_4 = \frac{\rho_1 - \rho_1^{\min}}{\rho_1^{\max} - \rho_1^{\min}} \frac{\rho_2 - \rho_2^{\min}}{\rho_2^{\max} - \rho_2^{\min}} \end{cases} \quad (\text{E.27})$$

En remplaçant dans l'expression de \tilde{M} les M_k^S et les α_k par leurs expressions ci-dessus, vérifie que l'on retrouve bien $\tilde{M} = M$. Ce résultat est encore valable pour un nombre de paramètres plus élevé. On retiendra qu'il y a équivalence entre les représentations affine et polytopique.

Transformation linéaire fractionnaire

Nous souhaitons commander un procédé de matrice de transfert $P(s)$ comportant deux types d'entrées et deux types de sorties :

- u : vecteur des signaux de commande par lequel on peut agir sur le comportement du système par rétro-action.
- w : vecteur des signaux d'entrée exogènes pouvant comporter aussi bien les signaux de référence que des perturbations d'origine extérieure dont on souhaite minimiser l'effet.
- y : vecteur des signaux de sortie mesurés permettant d'élaborer la commande.
- e : vecteur des signaux de sorties à contrôler et caractérisant le plus ou moins bon fonctionnement du système d'asservissement.

Il est important de noter que ces différents vecteurs peuvent avoir des composantes communes. Le comportement du système peut être décrit, dans le domaine fréquentiel, par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} E(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix}, \quad (\text{E.28})$$

où la matrice de transfert $P(s)$ peut être ainsi partitionnée :

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{ew}(s) & P_{eu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix} \quad (\text{E.29})$$

Les vecteurs $E(s), Y(s), W(s)$ et $U(s)$ sont les transformées de Laplace respectives des vecteurs de signaux temporels $e(t), y(t), w(t)$ et $u(t)$. On calcule aisément la matrice de transfert entre w

et e qui est appelé *Transformation Fractionnaire Linéaire (LFT) inférieure*

$$E(s) = F_l(P(s), K(s))W(s), \quad (\text{E.30})$$

$$F_l(P(s), K(s)) = P_{ew}(s) + P_{eu}K(s) (\mathbb{I} - P_{yu}(s)K(s))^{-1} P_{yw}(s). \quad (\text{E.31})$$

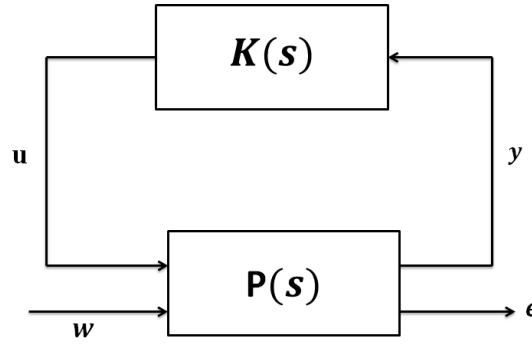


FIGURE E.1 – Représentation linéaire fractionnaire $F_u(G(s); H(s))$

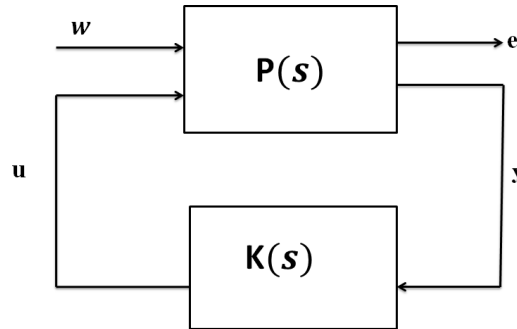


FIGURE E.2 – Représentation linéaire fractionnaire $F_e(G(s); H(s))$

Remarque 17. Si le retour d'état (feedback) est mis sur les deux ports supérieurs, une fonction de transfert similaire peut être dérivée et on parle alors de Transformation Fractionnaire Linéaire (LFu) supérieure :

Définition 19. Les Transformations Fractionnaires Linéaires supérieures et inférieures de P et K , sont définies par

$$F_l(P(s), K(s)) = P_{ew}(s) + P_{eu}K(s) (\mathbb{I} - P_{yu}(s)K(s))^{-1} P_{yw}(s), \quad (\text{E.32})$$

$$F_u(P(s), K(s)) = P_{yu}(s) + P_{yw}K(s) (\mathbb{I} - P_{ew}(s)K(s))^{-1} P_{eu}(s). \quad (\text{E.33})$$

Représentation linéaire fractionnaire

Une représentation linéaire fractionnaire (LFR en anglais) est l'interconnexion d'un système LTI avec une matrice Δ (un système statique) dépendant des paramètres, comme représenté sur la Figure E.3. Tout type de système LPV dont les matrices d'état dépendent rationnellement des paramètres peut être mis sous forme de LFR ; cependant il n'est pas toujours aisé de trouver une représentation LFR d'ordre minimale, c'est à dire avec une matrice Δ de taille minimale.

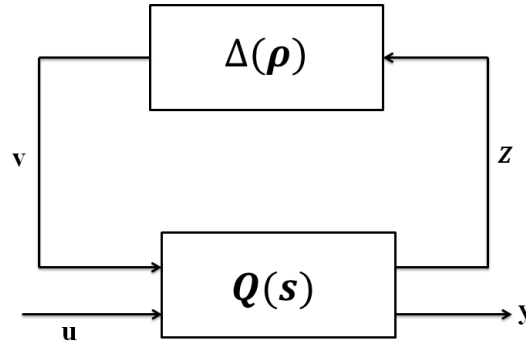


FIGURE E.3 – Modèle LFR.

Notons v et u les entrées provenant respectivement de Δ et de la commande, z et y les sorties destinées respectivement à Δ et à la mesure. Le système $Q(s)$ s'écrit :

$$\dot{x} = Ax + B_1 v + B_2 u \quad (\text{E.34})$$

$$z = C_1 x + D_{11} v + D_{12} u \quad (\text{E.35})$$

$$y = C_2 x + D_{21} v + D_{22} u \quad (\text{E.36})$$

En rebouclant avec la matrice Δ , c'est-à-dire en écrivant que

$$v = \Delta(\rho)z. \quad (\text{E.37})$$

on peut écrire les équations du système bouclé d'entrée u et de sortie y :

$$\dot{x} = \tilde{A}(\rho)x + \tilde{B}(\rho)u \quad (\text{E.38})$$

$$y = \tilde{C}(\rho)x + \tilde{D}(\rho)u \quad (\text{E.39})$$

avec

$$\tilde{A}(\rho) = A + B_1 \Delta(\rho) (\mathbb{I} - D_{11} \Delta(\rho))^{-1} C_1 \quad (\text{E.40})$$

$$\tilde{B}(\rho) = B_2 + B_1 \Delta(\rho) (\mathbb{I} - D_{11} \Delta(\rho))^{-1} D_{12} \quad (\text{E.41})$$

$$\tilde{C}(\rho) = C_2 + D_{21} \Delta(\rho) (\mathbb{I} - D_{11} \Delta(\rho))^{-1} C_1 \quad (\text{E.42})$$

$$\tilde{D}(\rho) = D_{22} + D_{21} \Delta(\rho) (\mathbb{I} - D_{11} \Delta(\rho))^{-1} D_{12} \quad (\text{E.43})$$

Cette représentation n'existe que si la matrice $(\mathbb{I} - D_{11} \Delta(\rho))^{-1}$ n'est pas singulière on parle de LFR "bien posée" (well-posed en anglais). Dans le cas où D_{11} est nulle, alors la dépendance des matrices est affine.

Synthèse pour les systèmes LPV

Retour d'état stabilisant

On cherche une commande de la forme $u = Kx$ pour un système $\dot{x} = Ax + Bu$. Le système en boucle fermée s'écrit $\dot{x} = (A + BK)x$. Il est stable s'il existe une matrice $Q = Q^T > 0$ vérifiant l'inégalité matricielle (voir E) :

$$(A + BK)^T Q + Q(A + BK) < 0 \quad (\text{E.44})$$

La résolution du problème suppose de trouver simultanément les matrices K et Q . On voit que cette inégalité n'est pas linéaire à cause du terme QBK ; elle ne peut donc être résolue par les outils numériques classiques. Toutefois, en multipliant à droite et à gauche l'inégalité par $R = Q^{-1}$ on obtient une inégalité équivalente sous la forme :

$$R(A + BK)^T + (A + BK)R < 0 \quad (\text{E.45})$$

En effectuant le changement de variable $S = KR$, on se ramène à résoudre l'inégalité matricielle linéaire suivante :

$$RA^T + S^T B^T + AR + BS < 0 \quad (\text{E.46})$$

Commande \mathcal{H}_∞

Position du problème

Pour le système $P(s)$ de représentation d'état

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ u \end{bmatrix} \quad (\text{E.47})$$

on cherche un correcteur dynamique $K(s)$ de représentation d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_k \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{E.48})$$

tel que

$$\|F_l(P(s), K(s))\|_\infty \leq \gamma, \quad \text{tel que } \gamma > 0 \quad (\text{E.49})$$

Les correcteurs assurant la plus petite valeur de γ possible seront dit "optimaux". Les méthodes de synthèse présentées ci-dessous, disponibles sous Matlab, s'appuient sur l'hypothèse suivante :

Hypothèse : Les paires de matrices (A, B_2) et (C_2, A) sont respectivement

1. *stabilisable* : La stabilisabilité est une condition moins forte que la commandabilité. Le système est dit stabilisable si ses pôles non commandables appartiennent tous au demi-plan gauche ouvert. La paire (A, B_2) est stabilisable s'il existe un retour d'état $u = Kx$ qui stabilise le système $\dot{x} = Ax + B_2u$.

Théorème 20. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

- (A, B) est stabilisable
- La matrice $\begin{bmatrix} A - \lambda_i & B \end{bmatrix}$ est de rang plein pour $\text{Re}(\lambda) \geq 0$
- pour tout $x \neq 0$ et λ tel que $x^T A = \lambda x$ et $\text{Re}(\lambda) \geq 0$ on a $x^T B \neq 0$.

2. *déTECTABLE* : La détectabilité est une condition moins forte que l'observabilité. Le système est dit détectable si ses pôles non observables appartiennent tous au demi-plan gauche ouvert. La paire (C_2, A) est détectable s'il existe un observateur $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y)$ telle que l'erreur d'observation $\hat{x} - x$ converge vers zéro.

Résolution du système \mathcal{H}_∞ standard par equation de ricatti

La première méthode de synthèse, due à Glover et Doyle, s'appuie sur la résolution d'une équation de Riccati [130]. L'exposé rapide de la méthode donnée ci-dessous est tirée de l'ouvrage de Duc et Font [131]. Pour $P = P^T$ et $Q = Q^T$ de même dimension d'une matrice A . On note :

$$X = Ric \begin{pmatrix} A & -P \\ -Q & -A^T \end{pmatrix} \quad (\text{E.50})$$

la solution symétrique de l'équation de Riccati :

$$XA + A^T X - XPX + Q = 0, \quad (\text{E.51})$$

telle que toutes les valeurs propres de $A - Px$ ont une partie réelle strictement négative.

Outre l'hypothèse précédent, les hypothèses suivantes doivent être satisfaites :

H2. $\text{rang}(D_{12}) = n_u$ et $\text{rang}(D_{21}) = n_y$ où n_u est la taille de u et n_y est la taille de y .

H3. $\forall \omega \in \mathbb{R}, \text{rang} \begin{pmatrix} A - j\omega \mathbb{I}_n & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} = n + n_u$ où n est la taille de x .

H4. $\forall \omega \in \mathbb{R}, \text{rang} \begin{pmatrix} A - j\omega \mathbb{I}_n & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix} = n + n_y$.

H5. $D_{11} = 0, D_{12}^T \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I}_{n_u} \end{bmatrix}, D_{22} = 0, \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I}_{n_y} \end{bmatrix}$.

Remarque 18. – **H1** est l'hypothèse classique de toute méthode de synthèse utilisant les variables d'états (commande modales ou LQG par exemple) : elle est nécessaire pour obtenir la stabilité du système bouclé.

– **H2** est une condition suffisante pour que la matrice du transfert du correcteur soit propre.

Théorème 21. Synthèse H_∞ par équation de Riccati Sous les hypothèses précédentes, les correcteurs LTI $K(s)$ stabilisant le système et assurant (E.49) sont donnés par la LFT suivante :

$$K(s) = F_l(K_a(s), \phi(s)), \quad (\text{E.52})$$

où $\phi(s)$ est une matrice de transfert de dimension $n_u \times n_y$ arbitraire vérifiant $\|\phi(s)\| < \gamma$ et où $K_a(s)$ est décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ u \\ u_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & Z_a Y_a C_2^T & Z_a B_2 \\ -B_2^T X_a & \mathbb{O} & \mathbb{I}_{n_u} \\ -C_2 & \mathbb{I}_{n_y} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ u \end{bmatrix} \quad (\text{E.53})$$

où $A_a = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_a - B_2 B_2^T X_a - Z_a Y_a C_2 C_2^T$ et $Z_a = (\mathbb{I}_n - \gamma^{-2} Y_a X_a)^{-1}$.

En particulier, le correcteur central est obtenu avec $\phi(s) = 0$.

Résolution du système \mathcal{H}_∞ standard par inégalités matricielles affines

Apparue plus récemment, la synthèse par LMI fournit une autre façon de résoudre le problème standard. Elle est plus générale, dans la mesure où elle nécessite pas le respect des hypothèses **H2-H4** (l'hypothèse **H1** reste nécessaire).

La caractérisation LMI de la boucle fermée est donnée par le lemme bornée réel 5. Pour le système en boucle fermée $F_l(P(s), K(s))$, ce résultats se réécrit :

$$\begin{bmatrix} A_{bf}^T Q + Q A_{bf} & Q B_{bf} & C_{bf}^T \\ B_{bf}^T Q & -\gamma I & D_{bf}^T \\ C_{bf} & D_{bf} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{E.54})$$

où les matrices du système en boucle fermée sont données par :

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A_{bf} & B_{bf} \\ \hline C_{bf} & D_{bf} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2 D_K C_2 & B_2 C_K & B_1 + B_2 D_K D_{21} \\ B_K C_1 & A_K & B_K D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} D_K C_2 & D_{12} C_K & D_{11} + D_{12} D_K D_{21} \end{array} \right] \quad (\text{E.55})$$

dans le cas où $D_{22} = \mathbb{O}$.

Il s'agit d'un problème non-linéaire à cause du produit entre la matrice de Lyapunov Q et les matrices du correcteur à déterminer. La méthode suivante permet de résoudre le problème. Elle consiste à résoudre d'abord un problème LMI où les matrices du correcteur ont été supprimées.

Théorème 22. *Le problème \mathcal{H}_∞ a une solution s'il existe des matrices symétriques R et S qui vérifient les trois conditions LMI suivantes :*

$$\begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n_v} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC_1^T & B_1 \\ C_2 R & -\gamma \mathbb{I}_{n_z} & D_{21} \\ B_1^T & D_{21}^T & -\gamma \mathbb{I}_{n_v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n_v} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{E.56})$$

$$\begin{bmatrix} N_S & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n_z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T S + SA & SB_1 & C_1 \\ B_1^T S & -\gamma \mathbb{I}_{n_v} & D_{21}^T \\ C_2^T & D_{21} & -\gamma \mathbb{I}_{n_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_S & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n_z} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{E.57})$$

$$\begin{bmatrix} R & \mathbb{I}_n \\ \mathbb{I}_n & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{E.58})$$

où N_R et N_S sont des bases des noyaux respectivement de $\begin{bmatrix} B_2^T & D_{21}^T \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$.

Remarque 19. *La détermination du correcteur se fait suivant les étapes suivantes :*

1. On détermine d'abord les matrices R et S à partir des LMI du théorème 22.
2. Soit r le rang de la matrice $\mathbb{I}_n - RS$. Une décomposition en valeurs singulière permet de déterminer les matrices M et $N \in \mathbb{R}^{n \times r}$ telles que :

$$MN^T = \mathbb{I}_n - RS \quad (\text{E.59})$$

3. On détermine ensuite la matrice de Lyapunov :

$$\begin{bmatrix} S & N \\ N^T & -M^\dagger R N \end{bmatrix} \quad (\text{E.60})$$

où M^\dagger est le pseudo-inverse de M .

Il ne reste plus qu'à résoudre E.54 avec Q connu ; ce qui est une LMI en A_K, B_K, C_K et D_K .

Bibliographie

- [1] Luigi Biagiotti and Claudio Melchiorri. *Trajectory Planning for Automatic Machines and Robots*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2008. ISBN 3540856285, 9783540856283.
- [2] Michael A. Goodrich and Alan C. Schultz. Human-robot interaction : a survey. *Found. Trends Hum.-Comput. Interact.*, 1(3) :203–275, January 2007. ISSN 1551-3955. doi : 10.1561/11000000005. URL <http://dx.doi.org/10.1561/11000000005>.
- [3] Philippe Poignet and Gérard Poisson. La conception de robots pour l’assistance aux gestes médicaux et chirurgicaux. In *Actes des Journées Nationales de Recherche en Robotique (JNRR)*, 2005.
- [4] Haifa Mehdi and Olfa Boubaker. Stiffness and impedance control using lyapunov theory for robot-aided rehabilitation. *Int. J. of Social Robotics*, pages 1 – 13, 2011. ISSN 1875-4791.
- [5] P. Akella, M. Peshkin, E. Colgate, W. Wannasuphoprasit, N. Nagesh, J. Wells, S. Holland, and Pearson. Cobots for the automobile assembly line. In *Robotics and Automation, Proc. of IEEE Int. Conf. on*, volume 1, pages 728 –733, 1999.
- [6] M.S. Erden and T. Tomiyama. Human-intent detection and physically interactive control of a robot without force sensors. *Robotics, IEEE Transactions on*, 26(2) :370–382, April 2010. ISSN 1552-3098.
- [7] Tytus Wojtara, Masafumi Uchihara, Hideyuki Murayama, Shingo Shimoda, Satoshi Sakai, Hideo Fujimoto, and Hidenori Kimura. Human-robot collaboration in precise positioning of a three-dimensional object. *Automatica*, 45(2) :333 – 342, 2009. ISSN 0005-1098.

- [8] J.-H. Jean, Kuan-Ting Chen, Kuang-Yao Shih, and Hsiu-Li Lin. Design of an entertainment robot with multimodal human-robot interactions. In *SICE Annual Conference, 2008*, pages 1437–1441, 2008. doi : 10.1109/SICE.2008.4654884.
- [9] W. Wannasuphoprasit, R.B. Gillespie, J.E. Colgate, and M.A. Peshkin. Cobot control. In *Robotics and Automation, 1997. Proceedings., 1997 IEEE International Conference on*, volume 4, pages 3571–3576 vol.4, 1997. doi : 10.1109/ROBOT.1997.606888.
- [10] M. Lawitzky, A. Mörtl, and S. Hirche. Load sharing in human-robot cooperative manipulation. In *RO-MAN, Proc. of IEEE Conf. on*, pages 185 –191, sept. 2010.
- [11] Edward Colgate, Michael Peshkin, and Witaya Wannasuphoprasit. Cobots : Robots for collaboration with human operators. In *Proc. Of the ASME Dynamic Systems and Control Division*, volume 58, pages 433–440, 1996.
- [12] H. Kazerooni. Human-robot interaction via the transfer of power and information signals. *Systems, Man, and Cybernetics, IEEE Trans. on*, 20(2) :450 – 463, March/April 1990.
- [13] T. Miyhoshi and A. Murata. Chaotic characteristic in human hand movement. In *Robot and Human Interactive Communication, 2000. RO-MAN 2000. Proceedings. 9th IEEE International Workshop on*, pages 194–199, 2000. doi : 10.1109/ROMAN.2000.892494.
- [14] Agostino De Santis, Bruno Siciliano, Alessandro De Luca, and Antonio Bicchi. An atlas of physical human robot interaction. *Mechanism and Machine Theory*, 43(3) :253 – 270, 2008. ISSN 0094-114X. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2007.03.003>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X07000547>.
- [15] R. J. Adams, P. Apkarian, and J.-P. Chrétien. Robust control approaches for a two-link flexible manipulator. In *IN 3RD INTERNATIONAL CONFERENCE ON DYNAMICS AND CONTROL OF STRUCTURES IN SPACE*, pages 101–116, 1996.
- [16] Housseem Halalchi, Edouard Laroche, and Gabriela Iuliana Bara. Lpv modeling and control of a 2-dof robotic manipulator based on descriptor representation. *Pan-American Congress of Applied Mechanics», Foz do Iguaçu, Brazil*, 2010.
- [17] Housseem Halalchi, Edouard Laroche, and G Iuliana Bara. Output feedback lpv control strategies for flexible robot arms. *proc. of the 18th IFAC World Congress, Milano, Italy*, 2011.

- [18] M. Spong and Vidyasagar M. *Robot dynamics and control*. John Wiley and Sons, Inc, 1989.
- [19] J. Denavit and R. S. Hartenberg. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Trans. ASME E, Journal of Applied Mechanics*, 22 :215–221, June 1955.
- [20] W. Khalil and J. Kleinfinger. A new geometric notation for open and closed-loop robots. In *Robotics and Automation. Proceedings. 1986 IEEE International Conference on*, volume 3, pages 1174–1179, 1986. doi : 10.1109/ROBOT.1986.1087552.
- [21] Wisama Khalil and Étienne Dombre. *Modeling, identification and control of robots*. HPS, London, 2002. ISBN 1-903996-13-9. URL <http://opac.inria.fr/record=b1098538>.
- [22] Donald L. Pieper. *The Kinematics of Manipulators under computer Control*. PhD thesis, Stanford, 1968.
- [23] Richard P. Paul. *Robot manipulators : mathematics, programming, and control*. MIT Press, Cambridge, MA, London, 1982. ISBN 0-262-16082-X. URL <http://opac.inria.fr/record=b1117455>. La 1e impr. est de 1981.
- [24] C. S. G. Lee and M. Ziegler. Geometric Approach in Solving Inverse Kinematics of PUMA Robots. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 20 :695–706, 1984. doi : 10.1109/TAES.1984.310452.
- [25] A.A. Goldenberg, B. Benhabib, and R.G. Fenton. A complete generalized solution to the inverse kinematics of robots. *Robotics and Automation, IEEE Journal of*, 1(1) :14–20, 1985. ISSN 0882-4967. doi : 10.1109/JRA.1985.1086995.
- [26] Renaud Marc. *Contribution a la modelisation et a la commande dynamique des robots manipulateurs*. PhD thesis, Toulouse 3, 1980. URL <http://opac.inria.fr/record=b1054794>.
- [27] W. Wolovich and H. Elliott. A computational technique for inverse kinematics. In *Decision and Control, 1984. The 23rd IEEE Conference on*, volume 23, pages 1359–1363, 1984. doi : 10.1109/CDC.1984.272258.
- [28] Roth B. Cours de robotique : Performance evaluation of manipulators from a kinematic viewpoint. Technical report, IRIA, Toulouse France, 1976.

- [29] Luigi Villani Bruno Siciliano, Lorenzo Sciavicco and Giuseppe Oriolo. *Robotics : Modelling, Planning and Control*. Springer-Verlag, 2009.
- [30] Y. Brémont, P. Agati, and G. Delville. *Mécanique du solide : applications industrielles*. Sciences sup. Dunod, 2001. ISBN 2-10-007945-X.
- [31] Étienne Dombre and Wisama Khalil. *Robot Manipulators : Modeling, Performance Analysis and Control*. ISTE, London, 2007. ISBN 1-905209-10-X.
- [32] W. Hooker and G. Margulies. The dynamical attitude equations for n-body satellite. *Journal of the Astronautical Sciences*, 12 :123, 1965.
- [33] J. Y. S. Luh, M. W. Walker, and R. P. C. Paul. On-line computational scheme for mechanical manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 102 :8, 1980.
- [34] D.E. Orin, R.B. McGhee, M. Vukobratovic, and G. Hartoch. Kinematic and kinetic analysis of open-chain linkages utilizing newton-euler methods. *Mathematical Biosciences*, 43(1-2) :107 – 130, 1979. ISSN 0025-5564. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0025-5564\(79\)90104-4](http://dx.doi.org/10.1016/0025-5564(79)90104-4). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0025556479901044>.
- [35] J.M. Hollerbach. A recursive lagrangian formulation of manipulator dynamics and a comparative study of dynamics formulation complexity. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, 10(11) :730–736, 1980. ISSN 0018-9472. doi : 10.1109/TSMC.1980.4308393.
- [36] Richard P. Paul. *Robot Manipulators : Mathematics, Programming, and Control (Artificial Intelligence)*. The MIT Press, 1982. ISBN 026216082X.
- [37] Rafael Kelly, Victor Santibáñez Davila, and Julio Antonio Loria Perez. *Control of Robot Manipulators in Joint Space (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing)*. Springer, 2010. ISBN 1852339942.
- [38] H. Kazerooni. Extender : a case study for human-robot interaction via transfer of power and information signals. In *Robot and Human Communication, 1993. Proceedings., 2nd IEEE International Workshop on*, pages 10–20, 1993. doi : 10.1109/ROMAN.1993.367756.

- [39] H. Kazerooni. Exoskeletons for human power augmentation. In *Intelligent Robots and Systems (IROS), IEEE/RSJ Int. Conf. on*, pages 3459 – 3464, aug. 2005.
- [40] Xavier Lamy. *Conception d'une Interface de Pilotage d'un Cobot*. These, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, March 2011. URL <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00748986>.
- [41] Edgar R. Powell. tool balancer. *Brevet United States Patent Office*, pages 767–807, 1969.
- [42] Michael Kornely. Self balancing electric hoist. *Brevet United States Patent Office*, 1989.
- [43] Homayoon Kazerooni. Human power amplifier for vertical maneuvers. *Brevet United States Patent Office*, 2001.
- [44] Y. Kuniyoshi, M. Inaba, and H. Inoue. Learning by watching : extracting reusable task knowledge from visual observation of human performance. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 10(6) :799–822, 1994. ISSN 1042-296X. doi : 10.1109/70.338535.
- [45] Marcelo H. Ang Jr, Wei Lin, and Ser-Yong Lim. A walk-through programmed robot for welding in shipyards. *Industrial Robot-an International Journal*, 26 :377–388, 1999. doi : 10.1108/01439919910284000.
- [46] N. Hogan. Impedance control - An approach to manipulation. I - Theory. II - Implementation. III - Applications. *ASME Transactions Journal of Dynamic Systems and Measurement Control B*, 107 :1–24, March 1985. URL http://adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-bib_querybibcode=1985ATJDS.107....1H.
- [47] Neville Hogans Tamar Flash. the coordination of arm movements an experimentally confirmed mathematical model. *The Journal of Neurosciences.*, 5(7) :1688–1703, July 1985.
- [48] P.F. Croshaw and GENERAL ELECTRIC CO SCHENECTADY NY SPECIALTY MATERIALS HANDLING PRODUCTS OPERATION. *Hardiman i Arm Test - Hardiman i Prototype Project*. Defense Technical Information Center, 1969. URL <http://books.google.fr/booksid=spBK0AAACAAJ>.
- [49] T. Fukuda, Y. Fujisawa, K. Kosuge, F. Arai, E. Muro, H. Hoshino, K. Miyazaki, K. Ohtsubo, and K. Uehara. Manipulator for man-robot cooperation. In *Industrial Electronics*,

- Control and Instrumentation, 1991. Proceedings. IECON '91., 1991 International Conference on*, pages 996–1001 vol.2, 1991. doi : 10.1109/IECON.1991.239154.
- [50] K. Kosuge, Y. Fujisawa, and T. Fukuda. Control of robot directly maneuvered by operator. In *Intelligent Robots and Systems '93, IROS '93. Proceedings of the 1993 IEEE/RSJ International Conference on*, volume 1, pages 49–54 vol.1, 1993. doi : 10.1109/IROS.1993.583078.
- [51] X. Lamy, F. Colledani, F. Geffard, Y. Measson, and G. Morel. Human force amplification with industrial robot : Study of dynamic limitations. In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2010 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 2487 –2494, oct. 2010.
- [52] S. Lichiardopol, N. van de Wouw, and H. Nijmeijer. Boosting human force : A robotic enhancement of a human operator's force. In *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, pages 4576 –4581, dec. 2008.
- [53] Rajesh Kumar, Peter Berkelman, Puneet Gupta, Aaron Barnes, Patrick S. Jensen, Louis L. Whitcomb, and Russell H. Taylor. Preliminary experiments in cooperative human/robot force control for robot assisted microsurgical manipulation. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 610–617, 2000.
- [54] B. Mitchell, J. Koo, M. Iordachita, P. Kazanzides, Ankur Kapoor, J. Handa, G. Hager, and Russell Taylor. Development and application of a new steady-hand manipulator for retinal surgery. In *Robotics and Automation, 2007 IEEE International Conference on*, pages 623–629, 2007. doi : 10.1109/ROBOT.2007.363056.
- [55] L.B. Rosenberg. Virtual fixtures : Perceptual tools for telerobotic manipulation. In *Virtual Reality Annual International Symposium, 1993., 1993 IEEE*, pages 76–82, 1993. doi : 10.1109/VRAIS.1993.380795.
- [56] Daniel Aarno, Staffan Ekvall, and Danica Kragic. Adaptive Virtual Fixtures for Machine-Assisted Teleoperation Tasks. In *International Conference on Robotics and Automation*, pages 1139–1144, 2005. doi : 10.1109/ROBOT.2005.1570231.
- [57] Shinsuk Park, Robert D. Howe, and David F. Torchiana. Virtual fixtures for robotic cardiac surgery. In *Proceedings of the 4th International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention, MICCAI '01*, pages 1419–1420, London, UK, UK, 2001. Springer-Verlag. ISBN 3-540-42697-3. URL <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=646924.710856>.

- [58] Alex B. Kuang, Shahram Payandeh, Bin Zheng, Frank Henigman, and Christine L. MacKenzie. Assembling virtual fixtures for guidance in training environments. In *Proceedings of the 12th international conference on Haptic interfaces for virtual environment and teleoperator systems*, HAPTICS'04, pages 367–374, Washington, DC, USA, 2004. IEEE Computer Society. ISBN 0-7695-2112-6. URL <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1880269.1880326>.
- [59] Craig Sayers. *Remote control robotics*. Springer, 1999. ISBN 978-0-387-98597-8.
- [60] J. Funda, R.H. Taylor, Benjamin Eldridge, S. Gomory, and K.G. Gruben. Constrained cartesian motion control for teleoperated surgical robots. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 12(3) :453–465, 1996. ISSN 1042-296X. doi : 10.1109/70.499826.
- [61] L.D. Joly and C. Andriot. Imposing motion constraints to a force reflecting telerobot through real-time simulation of a virtual mechanism. In *Robotics and Automation, 1995. Proceedings., 1995 IEEE International Conference on*, volume 1, pages 357–362 vol.1, 1995. doi : 10.1109/ROBOT.1995.525310.
- [62] Tomotaka Itoh, Kazuhiro Kosuge, and Toshio Fukuda. Human-machine cooperative telemanipulation with motion and force scaling using task-oriented virtual tool dynamics. *IEEE Transactions on Robotics*, 16(5) :505–516, 2000. URL <http://dblp.uni-trier.de/db/journals/trob/trob16.html#ItohKF00>.
- [63] Carl A. Moore, Michael A. Peshkin, and J. Edward Colgate. Cobot implementation of virtual paths and 3d virtual surfaces. *IEEE Transactions on Robotics*, 19(2) :347–351, 2003. doi : <http://dx.doi.org/10.1109/TRA.2003.808866>.
- [64] M. H. Raibert and J. J. Craig. Hybrid position/force control of manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 103(2), 1981. doi : <http://dx.doi.org/10.1115/1.3139652>.
- [65] M.A. Peshkin, J.E. Colgate, W. Wannasuphoprasit, C.A. Moore, R.B. Gillespie, and P. Akella. Cobot architecture. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 17(4) : 377–390, 2001. ISSN 1042-296X. doi : 10.1109/70.954751.
- [66] Matjaz Jakopc, Simon J. Harris, Ferdinando Rodriguez y Baena, Paula Gomes, and Brian L. Davies. The acrobot system for total knee replacement. *Industrial Robot : An International Journal*, 30(1), 2003.

- [67] Y.F. Zheng and J. Y S Luh. Optimal load distribution for two industrial robots handling a single object. In *Robotics and Automation, 1988. Proceedings., 1988 IEEE International Conference on*, pages 344–349 vol.1, 1988. doi : 10.1109/ROBOT.1988.12072.
- [68] M.E. Pittelkau. Adaptive load-sharing force control for two-arm manipulators. In *Robotics and Automation, 1988. Proceedings., 1988 IEEE International Conference on*, pages 498–503 vol.1, 1988. doi : 10.1109/ROBOT.1988.12101.
- [69] K. Kosuge, H. Yoshida, and T. Fukuda. Dynamic control for robot-human collaboration. In *Robot and Human Communication, 1993. Proceedings., 2nd IEEE International Workshop on*, pages 398–401, 1993. doi : 10.1109/ROMAN.1993.367685.
- [70] Q. Li, A. Takanishi, and I. Kato. Learning of robot biped walking with the cooperation of a human. In *Robot and Human Communication, 1993. Proceedings., 2nd IEEE International Workshop on*, pages 393–397, 1993. doi : 10.1109/ROMAN.1993.367686.
- [71] R. Ikeura, H. Monden, and H. Inooka. Cooperative motion control of a robot and a human. In *Robot and Human Communication, 1994. RO-MAN '94 Nagoya, Proceedings., 3rd IEEE International Workshop on*, pages 112–117, 1994. doi : 10.1109/ROMAN.1994.365946.
- [72] D. Surdilovic. Contact stability issues in position based impedance control : theory and experiments. In *Robotics and Automation, 1996. Proceedings., 1996 IEEE International Conference on*, volume 2, pages 1675–1680 vol.2, 1996. doi : 10.1109/ROBOT.1996.506953.
- [73] R. Ikeura and H. Inooka. Variable impedance control of a robot for cooperation with a human. In *Robotics and Automation, 1995. Proceedings., 1995 IEEE International Conference on*, volume 3, pages 3097–3102 vol.3, 1995. doi : 10.1109/ROBOT.1995.525725.
- [74] R. Ikeura, T. Moriguchi, and K. Mizutani. Optimal variable impedance control for a robot and its application to lifting an object with a human. In *Robot and Human Interactive Communication, 2002. Proceedings. 11th IEEE International Workshop on*, pages 500–505, 2002. doi : 10.1109/ROMAN.2002.1045671.
- [75] T. Tsumugiwa, R. Yokogawa, and K. Hara. Variable impedance control based on estimation of human arm stiffness for human-robot cooperative calligraphic task. In *Robotics*

- and Automation, 2002. Proceedings. ICRA '02. IEEE International Conference on*, volume 1, pages 644–650 vol.1, 2002. doi : 10.1109/ROBOT.2002.1013431.
- [76] Vincent Duchaine and C.M. Gosselin. General model of human-robot cooperation using a novel velocity based variable impedance control. In *EuroHaptics Conference, 2007 and Symposium on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems. World Haptics 2007. Second Joint*, pages 446–451, 2007. doi : 10.1109/WHC.2007.59.
- [77] Vincent Duchaine and C. Gosselin. Safe, stable and intuitive control for physical human-robot interaction. In *Robotics and Automation, 2009. ICRA '09. IEEE International Conference on*, pages 3383–3388, 2009. doi : 10.1109/ROBOT.2009.5152664.
- [78] Vincent Duchaine and Clément M. Gosselin. Unified robot control scheme for cooperative motion, autonomous motion and contact reaction. *Journal of Robotics and Mechatronics*, pages 557–566, 04 2011.
- [79] Torsten Kröger. *On-Line Trajectory Generation in Robotic Systems Basic Concepts for Instantaneous Reactions to Unforeseen (Sensor) Events.*, volume 58 of *Springer Tracts in Advanced Robotics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, Germany, January 2010.
- [80] R. Paul. Manipulator cartesian path control. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, 9(11) :702–711, 1979. ISSN 0018-9472. doi : 10.1109/TSMC.1979.4310109.
- [81] Russell H. Taylor. Planning and execution of straight line manipulator trajectories. *IBM J. Res. Dev.*, 23(4) :424–436, July 1979. ISSN 0018-8646. doi : 10.1147/rd.234.0424. URL <http://dx.doi.org/10.1147/rd.234.0424>.
- [82] Ralph H. Castain and Richard P. Paul. An on-line dynamic trajectory generator. *The International Journal of Robotics Research*, 3(1) :68–72, mars 1984. doi : DOI:10.1177/027836498400300106.
- [83] ISO. Robots for industrial environments - safety requirements ,—Part 1 : Robot. ISO 10218-1 :2006, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2006.
- [84] Seungbin Moon and G.S. Virk. Survey on iso standards for industrial and service robots. In *ICCAS-SICE, 2009*, pages 1878–1881, 2009.

- [85] I. Herrera-Aguilar. *Commande des bras manipulateurs et retour visuel pour des applications à la robotique de service*. PhD thesis, Université de Toulouse, 2007.
- [86] R. Haschke, E. Weitnauer, and H. Ritter. On-line planning of time-optimal, jerk-limited trajectories. In *Intelligent Robots and Systems, 2008. IROS 2008. IEEE/RSJ International Conference on*, pages 3248–3253, 2008. doi : 10.1109/IROS.2008.4650924.
- [87] Torsten Kröger and F.M. Wahl. Online trajectory generation : Basic concepts for instantaneous reactions to unforeseen events. *Robotics, IEEE Transactions on*, 26(1) :94–111, 2010. ISSN 1552-3098. doi : 10.1109/TRO.2009.2035744.
- [88] Torsten Kröger. On-line trajectory generation : Nonconstant motion constraints. In *Robotics and Automation (ICRA), 2012 IEEE International Conference on*, pages 2048–2054, may 2012. doi : 10.1109/ICRA.2012.6225186.
- [89] Keng Peng Tee, David W. Franklin, Mitsuo Kawato, Theodore E. Milner, and Etienne Burdet. Concurrent adaptation of force and impedance in the redundant muscle system. *Biol. Cybern.*, 102(1) :31–44, January 2010. ISSN 0340-1200. doi : 10.1007/s00422-009-0348-z. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00422-009-0348-z>.
- [90] E. Burdet, P. Tee, I. Mareels, E. Milner, M. Chew, W. Franklin, R. Osu, and M. Kawato. Stability and motor adaptation in human arm movements. *Biol. Cybern.*, 94(1) :20–32, December 2005. ISSN 0340-1200. doi : 10.1007/s00422-005-0025-9. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00422-005-0025-9>.
- [91] John J. Craig. *Introduction to Robotics : Mechanics and Control (3rd Edition)*. Prentice Hall, 2004.
- [92] A. Piazzzi and A. Visioli. Global minimum-jerk trajectory planning of robot manipulators. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 47(1) :140–149, 2000. ISSN 0278-0046. doi : 10.1109/41.824136.
- [93] Daniela Constantinescu. Smooth and time-optimal trajectory planning for industrial manipulators along specified paths. *J. Rob. Syst*, 17 :223–249, 2000.
- [94] Jean-Michel Coron. *Control and Nonlinearity*, volume 136 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, USA, 2007. ISBN 978-0-8218-4914-7.
- [95] D. Matthew, S. Berkemeier, and Fearing. Tracking fast inverted trajectories of the underactuated acrobot. *Automatic Control, IEEE Trans. on*, 15(4), 1999. ISSN 0018-9286.

- [96] A.A.G. Siqueira and M.H. Terra. Nonlinear and markovian h_∞ ; controls of underactuated manipulators. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 12(6) :811–826, 2004. ISSN 1063-6536. doi : 10.1109/TCST.2004.833626.
- [97] P. Apkarian and P. Gahinet. A convex characterization of gain-scheduled h_∞ ; controllers. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 40(5) :853–864, 1995. ISSN 0018-9286. doi : 10.1109/9.384219.
- [98] I. Masubuchi, T. Akiyama, and M. Saeki. Synthesis of output feedback gain-scheduling controllers based on descriptor lpv system representation. In *Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on*, volume 6, pages 6115–6120 Vol.6, 2003. doi : 10.1109/CDC.2003.1272243.
- [99] A. Bouali, P. Chevrel, and M. Yagoubi. About gain scheduled state feedback controllers for rational lpv systems. In *Control, Automation, Robotics and Vision, 2006. ICARCV '06. 9th International Conference on*, pages 1–6, 2006. doi : 10.1109/ICARCV.2006.345380.
- [100] I. Masubuchi, J. Kato, M. Saeki, and A. Ohara. Gain-scheduled controller design based on descriptor representation of lpv systems : application to flight vehicle control. In *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*, volume 1, pages 815–820 Vol.1, 2004. doi : 10.1109/CDC.2004.1428770.
- [101] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective output-feedback control via lmi optimization. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 42(7) :896–911, 1997. ISSN 0018-9286. doi : 10.1109/9.599969.
- [102] Izumi Masubuchi, Yoshiyuki Kamitane, Atsumi Ohara, and Nobuhide Suda. \mathcal{H}_∞ control for descriptor systems : a matrix inequalities approach. *Automatica*, 33(4) :669–673, April 1997. ISSN 0005-1098. doi : 10.1016/S0005-1098(96)00193-8. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0005-1098\(96\)00193-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0005-1098(96)00193-8).
- [103] Damien Koenig, Benoît Marx, and Didier Georges. Robust fault diagnosis for descriptor systems A coprime factorization approach. In IFAC, editor, *Safeprocess*, page CDROM, Washington, États-Unis, 2003. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00232846>.
- [104] Sigurd Skogestad and Ian Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control : Analysis and Design*. Wiley-Interscience, 2005. ISBN 0470011688.

- [105] Oded Yaniv. *Quantitative Feedback Design of Linear and Nonlinear Control Systems (The Springer International Series in Engineering and Computer Science)*. Springer, 1999. ISBN 0792385292.
- [106] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A.J. Laub, and M. Chilali. The lmi control toolbox. In *Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on*, volume 3, pages 2038–2041 vol.3, 1994. doi : 10.1109/CDC.1994.411440.
- [107] J. Lofberg. Yalmip : a toolbox for modeling and optimization in matlab. In *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*, pages 284–289, 2004. doi : 10.1109/CACSD.2004.1393890.
- [108] Y. Labit, Dimitri Peaucelle, and D. Henrion. Sedumi interface 1.02 : a tool for solving lmi problems with sedumi. In *Computer Aided Control System Design, 2002. Proceedings. 2002 IEEE International Symposium on*, pages 272–277, 2002. doi : 10.1109/CACSD.2002.1036966.
- [109] Jos F. Sturm. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones, 1998.
- [110] M. Bakošová, J. Oravec, and M. Kačur. Solution of a robust stabilization problem using yalmip and robust control toolboxes. In M. Fikar and M. Kvasnica, editors, *Proceedings of the 18th International Conference on Process Control*, pages 326–332, Tatranská Lomnica, Slovakia, 2011. Slovak University of Technology in Bratislava. URL <http://www.kirp.chnikf.stuba.sk/pc11/data/papers/069.pdf>.
- [111] William T. Thomson. *Theory of Vibration with Applications*. Nelson Thornes Ltd, 1988. ISBN 0044450699.
- [112] Marcelo H. Ang, Jr., Wei Wang, Robert N. K. Loh, and Teck-Seng Low. Passive compliance from robot limbs and its usefulness in robotic automation. *J. Intell. Robotics Syst.*, 20(1) :1–21, September 1997. ISSN 0921-0296. doi : 10.1023/A:1007952828908. URL <http://dx.doi.org/10.1023/A:1007952828908>.
- [113] U. Leipholz. *Theory of Elasticity (Mechanics of Elastic Stability)*. Springer, 1974. ISBN 9028601937.

- [114] Josip Loncaric. *Geometrical analysis of compliant mechanisms in robotics (euclidean group, elastic systems, generalized springs)*. PhD thesis, Harvard University, Cambridge, MA, USA, 1985. AAI8520241.
- [115] T. Patterson and H. Lipkin. Structure of Robot Compliance. *Transactions of ASME Journal of Mechanical Design*, 115 :576, 1993.
- [116] H. Patterson, T. and Lipkin. A classification of robot compliance. *ASME Transactions Journal of Dynamic Systems and Measurement Control B*, 115 :581–584, september 1993. URL <http://dx.doi.org/10.1115/1.2919229>.
- [117] M. Vukobratovic. *Dynamics and Robust Control of Robot-Environment Interaction*. New Frontiers in Robotics, 2. World Scientific Publishing Company, 2009. ISBN 9789812834768. URL http://books.google.fr/booksid=R_Ypa7FurQcC.
- [118] Friedrich Pfeiffer, K. Richter, and H. Wapenhans. Elastic robot trajectory planning with force control. In M. Carnevale, Mario Lucertini, and Salvatore Nicosia, editors, *Modelling the Innovation*, pages 201–212. North-Holland, 1990. ISBN 0-444-88565-X. URL <http://dblp.uni-trier.de/db/conf/ifip7/ifip7-1990.html#PfeifferRW90>.
- [119] D.E. Whitney and J.L. Nevins. *What is the Remote Center Compliance (RCC) and what Can it Do ?* P : Charles Stark Draper Laboratory. tactile and non vision IFS publication, 1978. URL <http://books.google.fr/booksid=0JIwmwEACAAJ>.
- [120] M. R. Cutkosky and P. K. Wright. Active Control of a Compliant Wrist in Manufacturing Tasks. *Journal of Engineering for Industry*, 108 :576, 1986.
- [121] Van Brussel H Simons J. force control schemes for robot assembly. *International trends in manufacturing technology : Robotic assembly in manufacturing tasks in robot sensors*, 2 :576, 1985.
- [122] Ekalo Y Miomir Vukobratovic. unified approach to control laws synthetisis for robotic manipulators in contact with dynamic environment. In *Tutorial S5 : force and contact control in robotic systems, proc.IEEE, int conferanvce on robotics and automation*, pages 213–229, 1993.
- [123] J.K. Salisbury. Active stiffness control of a manipulator in cartesian coordinates. In *Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes, 1980 19th IEEE Conference on*, volume 19, pages 95–100, 1980. doi : 10.1109/CDC.1980.272026.

- [124] Ali Mohamed. *Impedance control of redundant manipulators*. PhD thesis, Tampere University of Technology, 2011.
- [125] S.D. Eppinger and W.P. Seering. Three dynamic problems in robot force control. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 8(6) :751–758, 1992. ISSN 1042-296X. doi : 10.1109/70.182675.
- [126] G. Bilodeau and E. Papadopoulos. A model-based impedance control scheme for high-performance hydraulic joints. In *Intelligent Robots and Systems, 1998. Proceedings., 1998 IEEE/RSJ International Conference on*, volume 2, pages 1308–1313 vol.2, 1998. doi : 10.1109/IROS.1998.727480.
- [127] B. Heinrichs and N. Sepehri. A limitation of position based impedance control in static force regulation : theory and experiments. In *Robotics and Automation, 1999. Proceedings. 1999 IEEE International Conference on*, volume 3, pages 2165–2170 vol.3, 1999. doi : 10.1109/ROBOT.1999.770427.
- [128] S.E. Salcudean, S. Tafazoli, P. D. Lawrence, and I. Chau. Impedance control of a teleoperated mini excavator. In *In Proc. of the 8th IEEE International Conference on Advanced Robotics (ICAR, 1997*.
- [129] R. Cortesao, C. Sousa, and P. Queiro's. Active impedance control design for human-robot comanipulation. In *American Control Conference (ACC), 2010*, pages 2805–2810, 2010.
- [130] K. Glover. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an \mathcal{H}_∞ -norm bound and relations to relations to risk sensitivity. *Systems & Control Letters*, 11(3) : 167–172, September 1988. ISSN 01676911. doi : 10.1016/0167-6911(88)90055-2. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0167-6911\(88\)90055-2](http://dx.doi.org/10.1016/0167-6911(88)90055-2).
- [131] Gilles Duc and Stéphane Font. *Commande \mathcal{H}_∞ et μ -analyse : des outils pour la robustesse*. Collection pédagogique d'automatique. Hermès sciences, Paris, 1999. ISBN 2-7462-0041-4. URL <http://opac.inria.fr/record=b1094294>.